DETERMINATION OF ACCURACY OF NORMAL GRAVITY FIELD PARAMETERS

Marcel Mojzeš, Blažej Bucha

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

MOTIVÁCIA (1)

- Poruchové parametre tiažového poľa Zeme:

$$\{T, \delta g, \Delta g\}_P, \; P \in povrch\ Zeme$$

- Poruchový potenciál

$$T(P) = W(P) - U(P)$$

- Vektor poruchového tiažového zrýchlenia

$$\delta \mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(P)$$

- Porucha tiažového zrýchlenia

$$\delta g(P) = g(P)\cos\left(n, n^E\right) - \gamma(P) \doteq g(P) - \gamma(P)$$

$$\cos\left(n, n^E\right) \doteq 1, \; max.\ chyba\ 20\ \mu Gal$$

MOTIVÁCIA (2)

- Klasické riešenie bolo založené na vektoroch anomálií tiažového zrýchlenia

$$\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(Q)$$

- Nejednoznačnosť určenia $\boldsymbol{\gamma}(Q)$ na teluroide, v dôsledku rôznych výšok mareografov (variácia až 2 m, Burša a kol. 2000), t.j. 0.6 mGal,

- !SYSTEMATICKÁ CHYBA PRI HOMOGENIZÁCII ÚDAJOV!

MOTIVÁCIA (3)

- Anomália tiažového zrýchlenia

$$\Delta g = g(P)\cos\left(n, n^{E}\right) - \gamma(Q)$$

$$\Delta g \doteq g(P) - \gamma(Q),$$

$$pretože \ \cos\left(n, n^{E}\right) \doteq 1$$

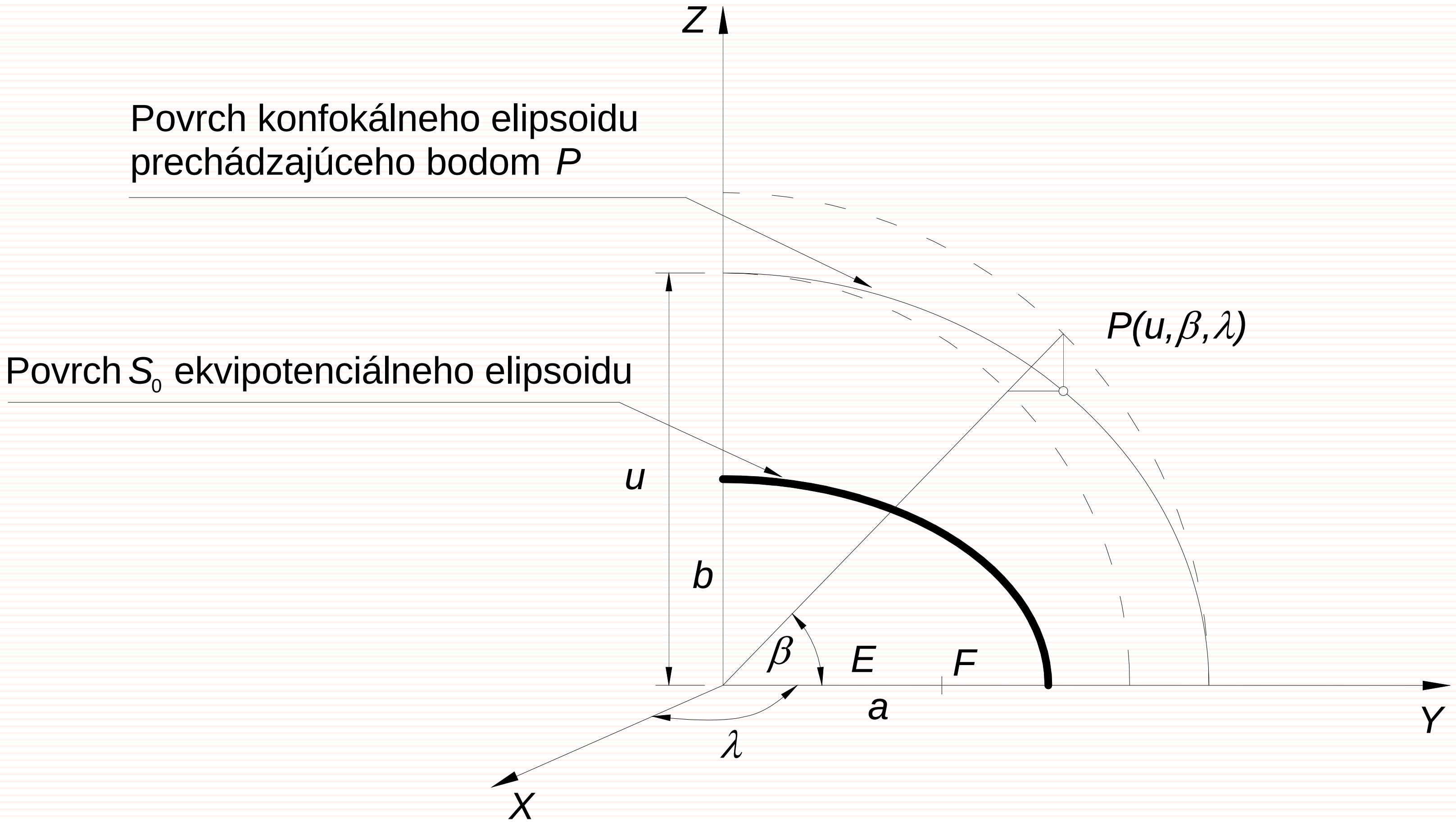
CIEĽ PRÍSPEVKU

- Analyzovať vplyv chýb v určení polohy bodu $P(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})$ na fyzikálne parametre $U(P)$ a $\gamma(P)$ ako funkcie

$$\sigma_U(P) = f_U\left(GM, \omega, J_{2,0}, a; \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}; \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z\right)$$

$$\sigma_\gamma(P) = f_\gamma\left(GM, \omega, J_{2,0}, a; \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}; \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z\right)$$

NORMÁLNY TIAŽOVÝ POTENCIÁL



- Elipsoidické harmonické súradnice bodu P: $P(u, \beta, \lambda)$

NORMÁLNY TIAŽOVÝ POTENCIÁL

- Normálny tiažový potenciál na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu je daný vzťahom:

$$U_0 = \frac{GM}{E}\arctan\left(\frac{E}{b}\right) + \frac{\omega^2}{3}a^2 = f(GM, \omega, a, b)$$

- Normálny tiažový potenciál v bode *P* mimo povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu je daný vzťahom:

$$U(u,\beta) = \frac{GM}{E}\arctan\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0}\left(\sin^2\beta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\omega^2\left(u^2 + E^2\right)\cos^2\beta$$

kde

$$q = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{u^2}{E^2}\right)\arctan\frac{E}{u} - 3\frac{u}{E}\right]$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{E^2}\right)\arctan\frac{E}{b} - 3\frac{b}{E}\right]$$

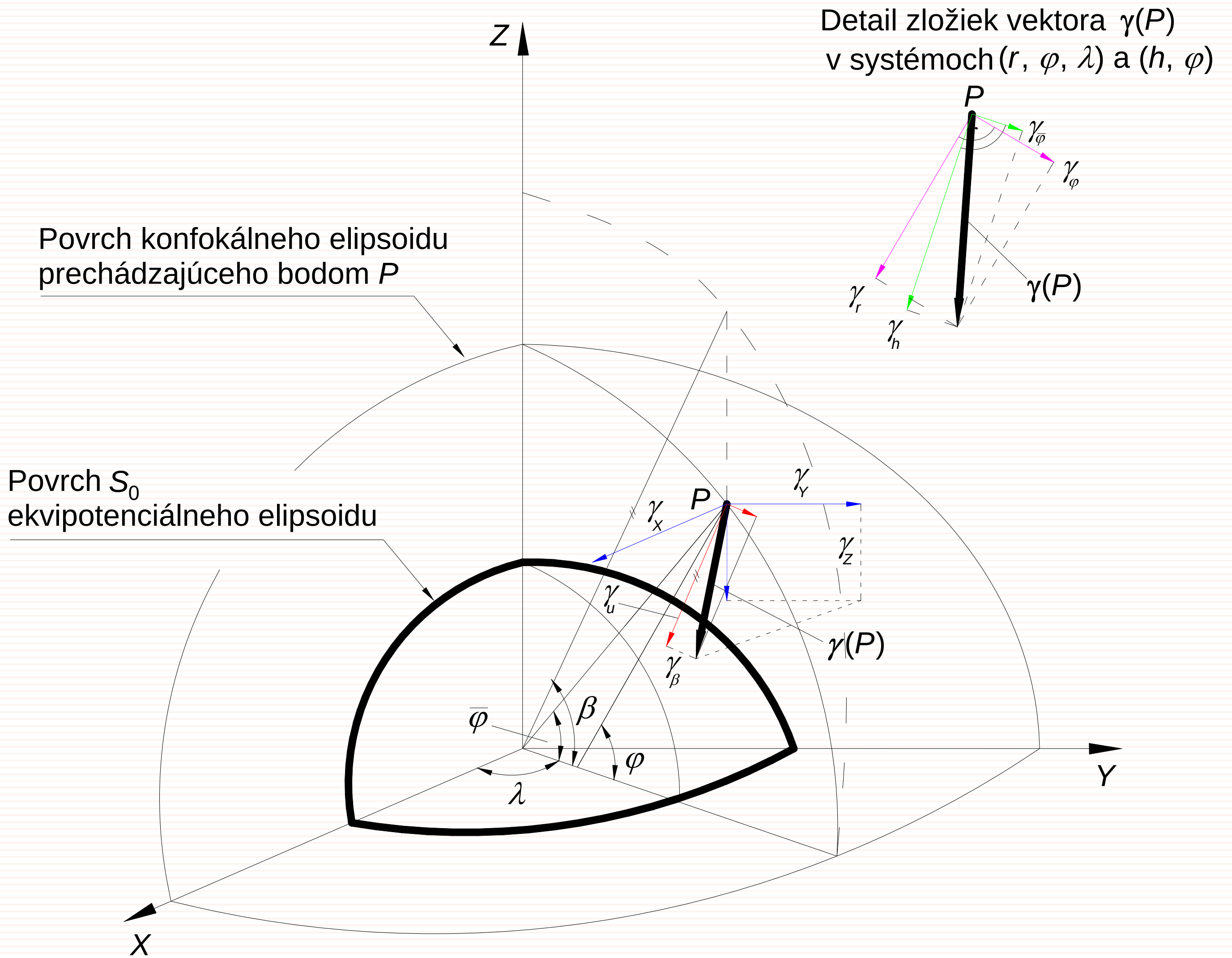
VEKTOR NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA

- Pre vektor normálneho tiažového zrýchlenia platí:

$$\boldsymbol{\gamma}(P) = grad\left(U\left(P\right)\right)$$

- Zložky vektora $\boldsymbol{\gamma}(P)$ je možné vyjadriť v súradnicových systémoch:
  - $(u, \beta, \lambda)_P$ – elipsoidických harmonických súradníc,
  - $(X, Y, Z)_P$ – karteziánskych súradníc,
  - $(r, \bar{\varphi}, \lambda)_P$ - sférických súradníc,
  - $(h, \varphi)_P$ - smere normály k elipsoidu.

VEKTOR NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA



VEKTOR NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA

- Vektor normálneho tiažového zrýchlenia v súradnicovom systéme $(u, \beta, \lambda)_P$

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,\beta,\lambda}(P)=\begin{bmatrix}\gamma_u\\ \gamma_\beta\\ \gamma_\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{w}\left[\frac{GM}{u^2+E^2}+\frac{\omega^2a^2E}{u^2+E^2}\frac{q'}{q_0}\left(\frac{1}{2}\sin^2\beta-\frac{1}{6}\right)-\omega^2u\cos^2\beta\right]\\ -\frac{1}{w}\left[-\frac{\omega^2a^2}{\sqrt{u^2+E^2}}\frac{q}{q_0}+\omega^2\sqrt{u^2+E^2}\right]\sin\beta\cos\beta\\ 0\end{bmatrix}$$

- Vektor normálneho tiažového zrýchlenia v súradnicovom systéme $(X, Y, Z)_P$

$$\boldsymbol{\gamma}_{X,Y,Z}(P)=\begin{bmatrix}\gamma_X\\ \gamma_Y\\ \gamma_Z\end{bmatrix}=\mathbf{R}(u,\beta,\lambda)\begin{bmatrix}\gamma_u\\ \gamma_\beta\\ \gamma_\lambda\end{bmatrix}$$

- Vektor normálneho tiažového zrýchlenia v súr. systéme $(r, \bar{\varphi}, \lambda)_P$

$$\boldsymbol{\gamma}_{r,\bar{\varphi},\lambda}(P)=\begin{bmatrix}\gamma_r\\ \gamma_{\bar{\varphi}}\\ \gamma_\lambda\end{bmatrix}=\mathbf{R}(\bar{\varphi},\lambda)\begin{bmatrix}\gamma_X\\ \gamma_Y\\ \gamma_Z\end{bmatrix}$$

Vektor normálneho tiažového zrýchlenia v súr. systéme $(h, \varphi)_P$

$$\boldsymbol{\gamma}_{h,\varphi}(P)=\begin{bmatrix}\gamma_h\\ \gamma_\varphi\end{bmatrix}=\mathbf{R}(\alpha)\begin{bmatrix}\gamma_r\\ \gamma_{\bar{\varphi}}\end{bmatrix}$$

VEKTOR NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA

- Tvary jednotlivých rotačných matíc sú nasledovné:

$$\mathbf{R}(u,\beta,\lambda)=\begin{bmatrix} \dfrac{u}{w\sqrt{u^2+E^2}}\cos\beta\cos\lambda & -\dfrac{1}{w}\sin\beta\cos\lambda & -\sin\lambda \\ \dfrac{u}{w\sqrt{u^2+E^2}}\cos\beta\sin\lambda & -\dfrac{1}{w}\sin\beta\sin\lambda & \cos\lambda \\ \dfrac{1}{w}\sin\beta & \dfrac{u}{w\sqrt{u^2+E^2}}\cos\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\overline{\varphi},\lambda)=\begin{bmatrix} \cos\overline{\varphi}\cos\lambda & \cos\overline{\varphi}\sin\lambda & \sin\overline{\varphi} \\ -\sin\overline{\varphi}\cos\lambda & -\sin\overline{\varphi}\sin\lambda & \cos\overline{\varphi} \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\alpha)=\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{,kde } \alpha=\varphi-\overline{\varphi}$$

PRENOS STREDNÝCH CHÝB V URČENÍ POLOHY BODU NA VYBRATÉ FYZIKÁLNE PARAMETRE NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO POĽA ZEME

- Kovariančná matica elipsoidických harmonických súradníc

$$\mathbf{\Sigma}_{u,\beta,\lambda} = \mathbf{B}^T \mathbf{\Sigma}_{X,Y,Z} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial X} & \frac{\partial \beta}{\partial Y} & \frac{\partial \beta}{\partial Z} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial X} & \frac{\partial \lambda}{\partial Y} & \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Sigma}_{X,Y,Z}$ - *kovariančná matica určenej polohy bodu*

PRENOS STREDNÝCH CHÝB V URČENÍ POLOHY BODU NA VYBRATÉ FYZIKÁLNE PARAMETRE NORMÁLNEHO TIAŽOVÉHO POĽA ZEME

- Stredná chyba normálneho tiažového potenciálu:

$$\sigma_U(P) = \sqrt{\mathbf{a}_U^T \boldsymbol{\Sigma}_{u,\beta} \mathbf{a}_U}\ \text{, kde}$$

$$\mathbf{a}_U = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U(u,\beta)}{\partial u} & \dfrac{\partial U(u,\beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{\Sigma}_{u,\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{u,\beta} \\ \sigma_{\beta,u} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}.$$

- Obdobným spôsobom výpočet strednej chyby veľkosti vektora normálneho tiažového zrýchlenia:

$$\sigma_\gamma(P) = \sqrt{\mathbf{a}_\gamma^T \boldsymbol{\Sigma}_{u,\beta} \mathbf{a}_\gamma}$$

$$\mathbf{a}_\gamma = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \gamma(u,\beta)}{\partial u} & \dfrac{\partial \gamma(u,\beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{\Sigma}_{u,\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{u,\beta} \\ \sigma_{\beta,u} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}.$$

NUMERICKÝ EXPERIMENT

- 1. modelová situácia
  - Bod P na území Vysokých Tatier $P(\varphi = 48°, \lambda = 19°, h = 1000\text{ m}) =$ $= P(X = 4\,043\,403.283\text{ m}, Y = 1\,392\,255.402\text{ m}, Z = 4\,717\,619.475\text{ m})$
  - Stredné chyby určenia polohy bodu P:
    - Statická metóda (7 dňové meranie): $\sigma_X = 2\text{ mm}, \sigma_Y = 2\text{ mm}, \sigma_Z = 4\text{ mm},$
    - RTK metóda (10 sekundové meranie): $\sigma_X = 20\text{ mm}, \sigma_Y = 20\text{ mm}, \sigma_Z = 60\text{ mm}.$
- 2. modelová situácia
  - Body $P_i(\varphi = \langle 0°, 90° \rangle, \lambda = \langle 0°, 90° \rangle, h = 0\text{ m})$
  - Stredné chyby určenia polohy bodov P_i:
    - Statická metóda (7 dňové meranie),
    - RTK metóda (10 sekundové meranie).

NUMERICKÝ EXPERIMENT – 1. MODELOVÁ SITUÁCIA

Statické meranie polohy

Tab. č. 1: Normálny tiažový potenciál, elipsoidické harmonické súradnice bodu P a ich stredné chyby pri stredných chybách geocentrických karteziánskych súradníc $\sigma_X = 2$ mm, $\sigma_Y = 2$ mm, $\sigma_Z = 4$ mm

$\boldsymbol{U}$ [m^2.s^{-2}]	$\boldsymbol{\sigma_U}$ [m^2.s^{-2}]	$\boldsymbol{u}$ [m]	$\boldsymbol{\sigma_u}$ [mm]
62627053.482	0.0320	6357753.822	3.3
$\boldsymbol{\beta}$ [°]	$\boldsymbol{\sigma_\beta}$ [°]	$\boldsymbol{\lambda}$ [°]	$\boldsymbol{\sigma_\lambda}$ [°]
47.904298112	2.76 x 10^{-8}	19	2.68 x 10^{-8}

RTK meranie polohy

Tab. č. 2: Normálny tiažový potenciál, elipsoidické harmonické súradnice bodu P a ich stredné chyby pri stredných chybách geocentrických karteziánskych súradníc $\sigma_X = 20$ mm, $\sigma_Y = 20$ mm, $\sigma_Z = 60$ mm

$\boldsymbol{U}$ [m^2.s^{-2}]	$\boldsymbol{\sigma_U}$ [m^2.s^{-2}]	$\boldsymbol{u}$ [m]	$\boldsymbol{\sigma_u}$ [mm]
62627053.482	0.4565	6357753.822	46.6
$\boldsymbol{\beta}$ [°]	$\boldsymbol{\sigma_\beta}$ [°]	$\boldsymbol{\lambda}$ [°]	$\boldsymbol{\sigma_\lambda}$ [°]
47.904298112	3.862 x 10^{-7}	19	2.68 x 10^{-7}

NUMERICKÝ EXPERIMENT – 1. MODELOVÁ SITUÁCIA

Statické meranie polohy

Tab. č. 3: Veľkosť vektora normálneho tiažového zrýchlenia, jeho zložky a ich stredné chyby v jednotlivých súradnicových systémoch pri $\boxed{\sigma_X = 2\ \text{mm},\ \sigma_Y = 2\ \text{mm},\ \sigma_Z = 4\ \text{mm}}$

Elipsoidické harmonické súradnice *u, β, λ*			
$\gamma_{u,\beta,\lambda}$ [m.s^{-2}]	γ_u [m.s^{-2}]	γ_β [m.s^{-2}]	γ_λ [m.s^{-2}]
9.805825573	-9.805825573	-0.000013240	0
$\sigma_{\gamma_{u,\beta,\lambda}}$ [μGal]	σ_{γ_u} [μGal]	σ_{γ_β} [μGal]	σ_{γ_λ} [μGal]
1.01	1.01	0.00	0
Geocentrické karteziánske súradnice *X, Y, Z*			
$\gamma_{X,Y,Z}$ [m.s^{-2}]	γ_X [m.s^{-2}]	γ_Y [m.s^{-2}]	γ_Z [m.s^{-2}]
9.805825573	-6.203899101	-2.136173770	-7.287153953
$\sigma_{\gamma_{X,Y,Z}}$ [μGal]	σ_{γ_X} [μGal]	σ_{γ_Y} [μGal]	σ_{γ_Z} [μGal]
1.01	0.64	0.22	0.75
Sférické súradnice *r, φ, λ*			
$\gamma_{r,\bar{\varphi},\lambda}$ [m.s^{-2}]	γ_r [m.s^{-2}]	φ [m.s^{-2}]	γ_λ [m.s^{-2}]
9.805825573	-9.805770812	-0.032771203	0
$\sigma_{\gamma_{r,\bar{\varphi},\lambda}}$ [μGal]	σ_{γ_r} [μGal]	$\sigma_{\gamma_{\bar{\varphi}}}$ [μGal]	σ_{γ_λ} [μGal]
1.01	0.69	0.67	0.29

NUMERICKÝ EXPERIMENT – 1. MODELOVÁ SITUÁCIA

RTK meranie polohy

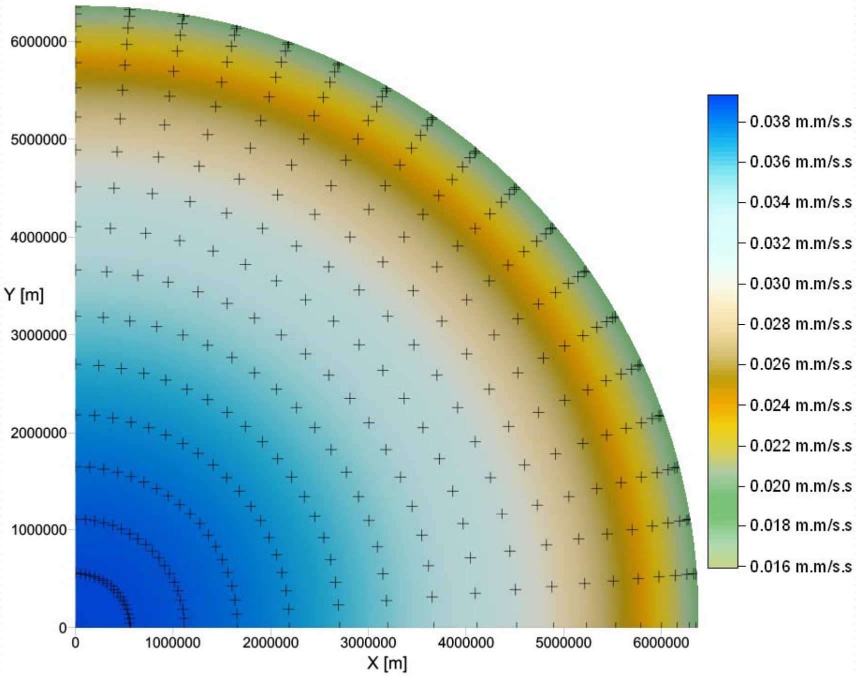
Tab. č. 4: Veľkosť vektora normálneho tiažového zrýchlenia, jeho zložky a ich stredné chyby v jednotlivých súradnicových systémoch pri $\sigma_X = 20$ mm, $\sigma_Y = 20$ mm, $\sigma_Z = 60$ mm

Elipsoidické harmonické súradnice *u, β, λ*			
$\gamma_{u,\beta,\lambda}$ [m.s^{-2}]	γ_u [m.s^{-2}]	γ_β [m.s^{-2}]	γ_λ [m.s^{-2}]
9.805825573	-9.805825573	-0.000013240	0
$\sigma_{\gamma_{u,\beta,\lambda}}$ [μGal]	σ_{γ_u} [μGal]	σ_{γ_β} [μGal]	σ_{γ_λ} [μGal]
14.36	14.36	0.06	0
Geocentrické karteziánske súradnice *X, Y, Z*			
$\gamma_{X,Y,Z}$ [m.s^{-2}]	γ_X [m.s^{-2}]	γ_Y [m.s^{-2}]	γ_Z [m.s^{-2}]
9.805825573	-6.203899101	-2.136173770	-7.287153953
$\sigma_{\gamma_{X,Y,Z}}$ [μGal]	σ_{γ_X} [μGal]	σ_{γ_Y} [μGal]	σ_{γ_Z} [μGal]
14.36	9.08	3.13	10.67
Sférické súradnice *r, φ, λ*			
$\gamma_{r,\bar{\varphi},\lambda}$ [m.s^{-2}]	γ_r [m.s^{-2}]	φ [m.s^{-2}]	γ_λ [m.s^{-2}]
9.805825573	-9.805770812	-0.032771203	0
$\sigma_{\gamma_{r,\bar{\varphi},\lambda}}$ [μGal]	σ_{γ_r} [μGal]	$\sigma_{\gamma_{\bar{\varphi}}}$ [μGal]	σ_{γ_λ} [μGal]
14.36	9.81	9.61	4.18

NUMERICKÝ EXPERIMENT – 2. MODELOVÁ SITUÁCIA

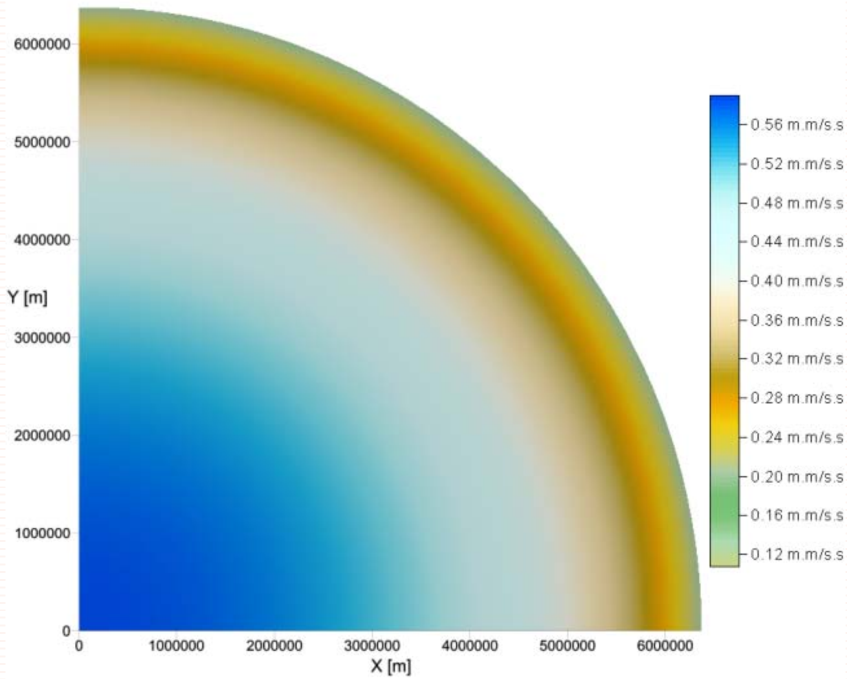
Stredné chyby normálneho tiažového potenciálu *pri* $\sigma_X(P) = 2$ mm, $\sigma_Y(P) = 2$ mm, $\sigma_Z(P) = 4$ mm *(vľavo), a pri* $\sigma_X(P) = 20$ mm, $\sigma_Y(P) = 20$ mm, $\sigma_Z(P) = 60$ mm *(vpravo)* *na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu*

Statické meranie polohy



$$\sigma_U \in \left(0.016\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2} - 0.036\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}\right)$$

RTK meranie polohy

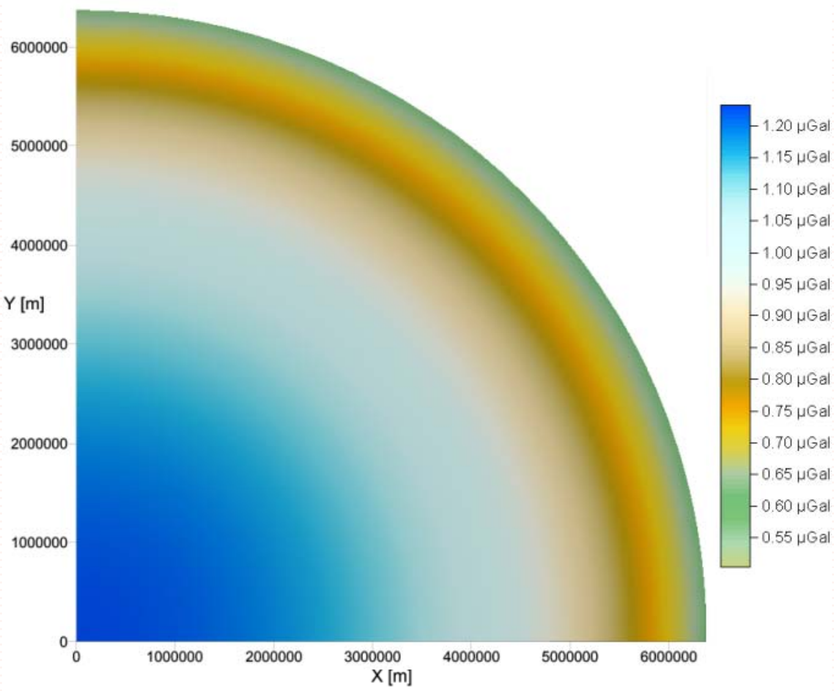


$$\sigma_U \in \left(0.12\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2} - 0.56\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}\right)$$

NUMERICKÝ EXPERIMENT – 2. MODELOVÁ SITUÁCIA

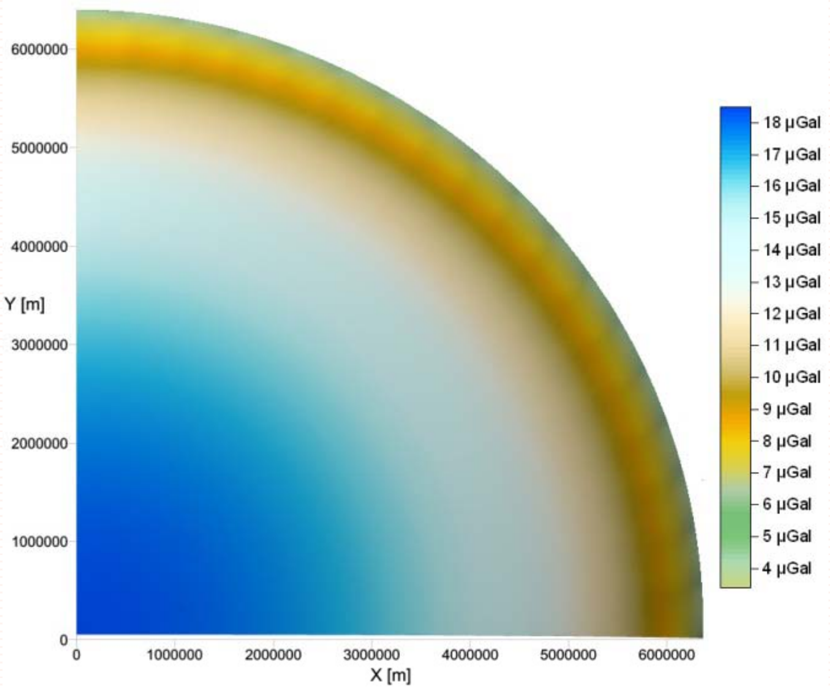
Stredné chyby veľkosti vektora normálneho tiažového zrýchlenia pri $\sigma_X(P)$ = 2 mm, $\sigma_Y(P)$ = 2 mm, $\sigma_Z(P)$ = 4 mm *(vľavo), a pri* $\sigma_X(P)$ = 20 mm, $\sigma_Y(P)$ = 20 mm, $\sigma_Z(P)$ = 60 mm *(vpravo) na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu*

Statické meranie polohy



$$\sigma_\gamma \in (0.55\,\mu\text{Gal} - 1.20\,\mu\text{Gal})$$

RTK meranie polohy



$$\sigma_\gamma \in (4\,\mu\text{Gal} - 18\,\mu\text{Gal})$$

Závery pre prax

- Normálny tiažový potenciál
- Poruchový potenciál

  $$T(P) = W(P) - U(P)$$

- Presnosť určenia $W(P)$
  - Gravimetria + presná nivelácia: cca 0.05 $m^2.s^{-2}$
  - Gravimetria + technická nivelácia: cca 0.5 $m^2.s^{-2}$
- Presnosť určenia $U(P)$
  - Statické meranie polohy: 0.0320 $m^2.s^{-2}$
  - RTK meranie polohy: 0.4565 $m^2.s^{-2}$

Závery pre prax

- Normálne tiažové zrýchlenie
- Porucha tiažového zrýchlenia

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(P)$$

- Presnosť určenia $g(P)$
  - Absolútne gravimetrické meranie: 0.5 – 1 μGal
  - Relatívne podrobné gravimetrické meranie: 10 – 30 μGal
- Presnosť určenia $\gamma(P)$
  - Statické meranie polohy: 1 μGal
  - RTK meranie polohy: 15 μGal

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ