# Energia, magnitúdo a intenzita tektonického zemetrasenia

Peter Moczo

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
FMFI UK Bratislava

Oddelenie seizmológie
Geofyzikálny ústav SAV

## tektonické zemetrasenie

spontánny vznik a spontánne šírenie trhliny na zlome,
vyžarovanie seizmických vĺn každým bodom šíriacej sa trhliny,
šírenie seizmických vĺn v Zemi
a kmitavý pohyb povrchu Zeme

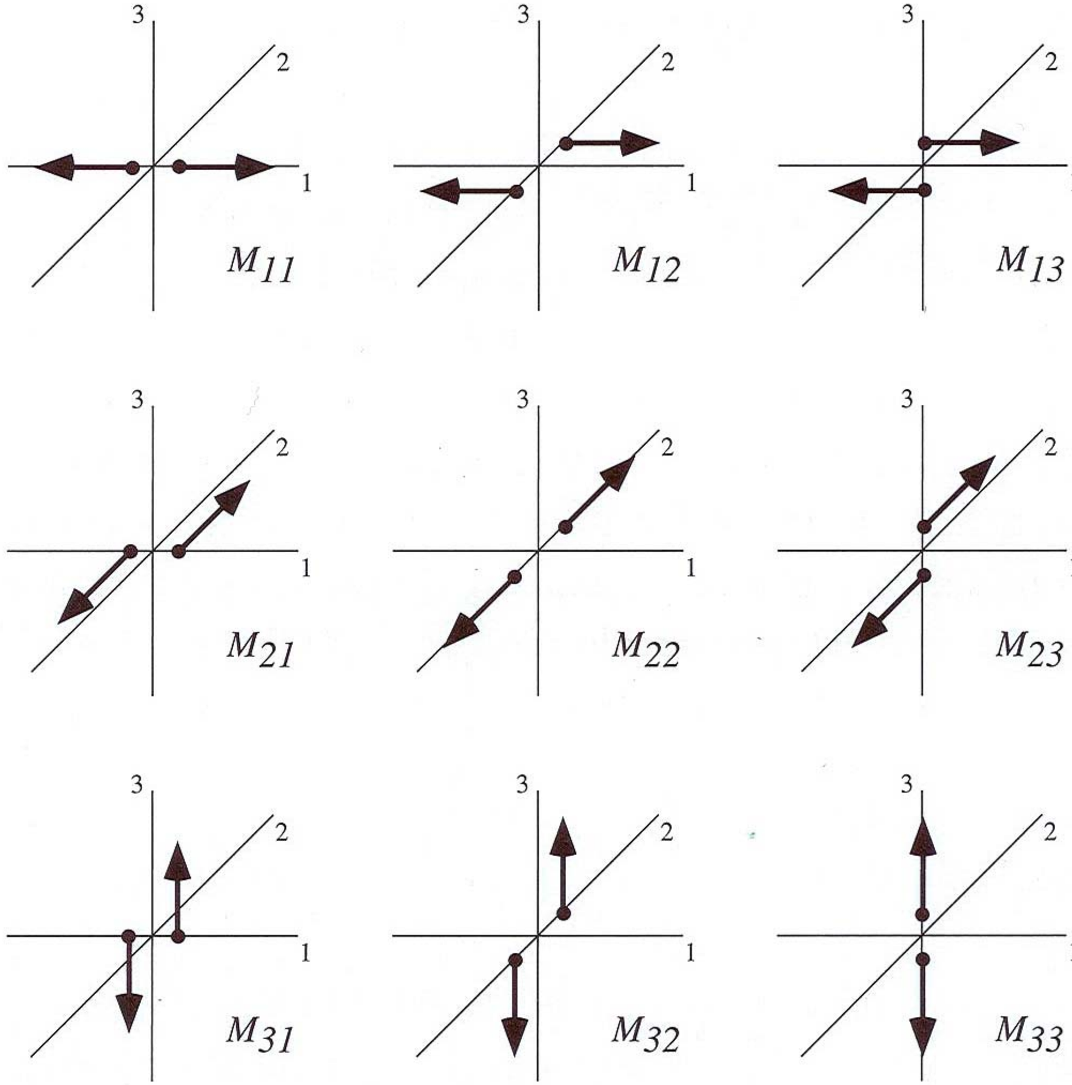
## časo-priestorovo závislá diskontinuita v posunutí ( trhlina ) na zlomovej ploche

$$\left[\vec{u}\left(\vec{\xi},\tau\right)\right] = \vec{u}^{+}\left(\vec{\xi}^{+},\tau\right) - \vec{u}^{-}\left(\vec{\xi}^{-},\tau\right)$$

spontánnosť trhliny: napätie na zlome je spojité

reprezentačná teoréma

$$u_n\left(\vec{x},t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} \left[u_i(\vec{\xi},\tau)\right] c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial G_{np}(\vec{x},t-\tau,\vec{\xi},0)}{\partial \xi_q} d\Sigma$$



$M_{11}$
$M_{12}$
$M_{13}$
$M_{21}$
$M_{22}$
$M_{23}$
$M_{31}$
$M_{32}$
$M_{33}$

$$u_n\left(\vec{x},t\right) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} \left[u_i(\vec{\xi},\tau)\right] c_{ijpq}\, \nu_j \,\frac{\partial G_{np}(\vec{x},t-\tau,\vec{\xi},0)}{\partial \xi_q}\, d\Sigma$$

tenzor hustoty momentu

$$m_{pq} \;=\; \left[u_i\right] c_{ijpq}\, \nu_j$$

reprezentačná teoréma

$$u_n\left(\vec{x},t\right) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} m_{pq} \,\frac{\partial G_{np}(\vec{x},t-\tau,\vec{\xi},0)}{\partial \xi_q}\, d\Sigma$$

$$u_n\left(\vec{x},t\right) \;=\; \int_{\Sigma} m_{pq} * G_{np},_q \; d\Sigma$$

$$u_n(\vec{x},t) = \int_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} \, d\Sigma$$

aproximácia bodového zdroja

$$u_n(\vec{x},t) \doteq G_{np,q} * \int_{\Sigma} m_{pq} \, d\Sigma$$

tenzor momentu

$$M_{pq} = \int_{\Sigma} m_{pq} \, d\Sigma$$

reprezentačná teoréma

$$u_n(\vec{x},t) \doteq M_{pq} * G_{np,q}$$

# tangenciálna trhlina v izotrópnom prostredí

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad ; \quad [\vec{u}] = [u]\,\vec{n}$$

tenzor hustoty momentu

$$m_{pq} = \mu\,[u]\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right)$$

tenzor momentu

$$\begin{aligned} M_{pq} &= \int_\Sigma \mu\,[u(t)\ ]\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right) d\Sigma \\ &\doteq \bar{\mu}\,[\bar{u}(t)\ ]\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right) \int_\Sigma d\Sigma \\ &= \bar{\mu}\,[\bar{u}(t)\ ]\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right) A \\ &= \bar{\mu}\,[\bar{u}(t_\infty)]\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right) A\, s(t) \end{aligned}$$

skalárny seizmický moment

$$M_0 = \bar{\mu}\,[\bar{u}(t_\infty)]\,A$$

tenzor momentu

$$M_{pq} = M_0\left(\nu_p n_q + \nu_q n_p\right) s(t)$$

reprezentačná teoréma

$$u_n\left(\vec{x},t\right) \doteq M_0 \left( \nu_p n_q + \nu_q n_p \right) s(t) * G_{np},_q$$

skalárny seizmický moment možno určiť,
ak poznáme tenzor momentu

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{pq} M_{pq}^2 \right)^{1/2}$$

$M_0$ nehovorí nič priamo
o dynamike seizmického zdroja,
t.j. o šírení trhliny

kvantifikuje nevratné statické posunutie na zlome

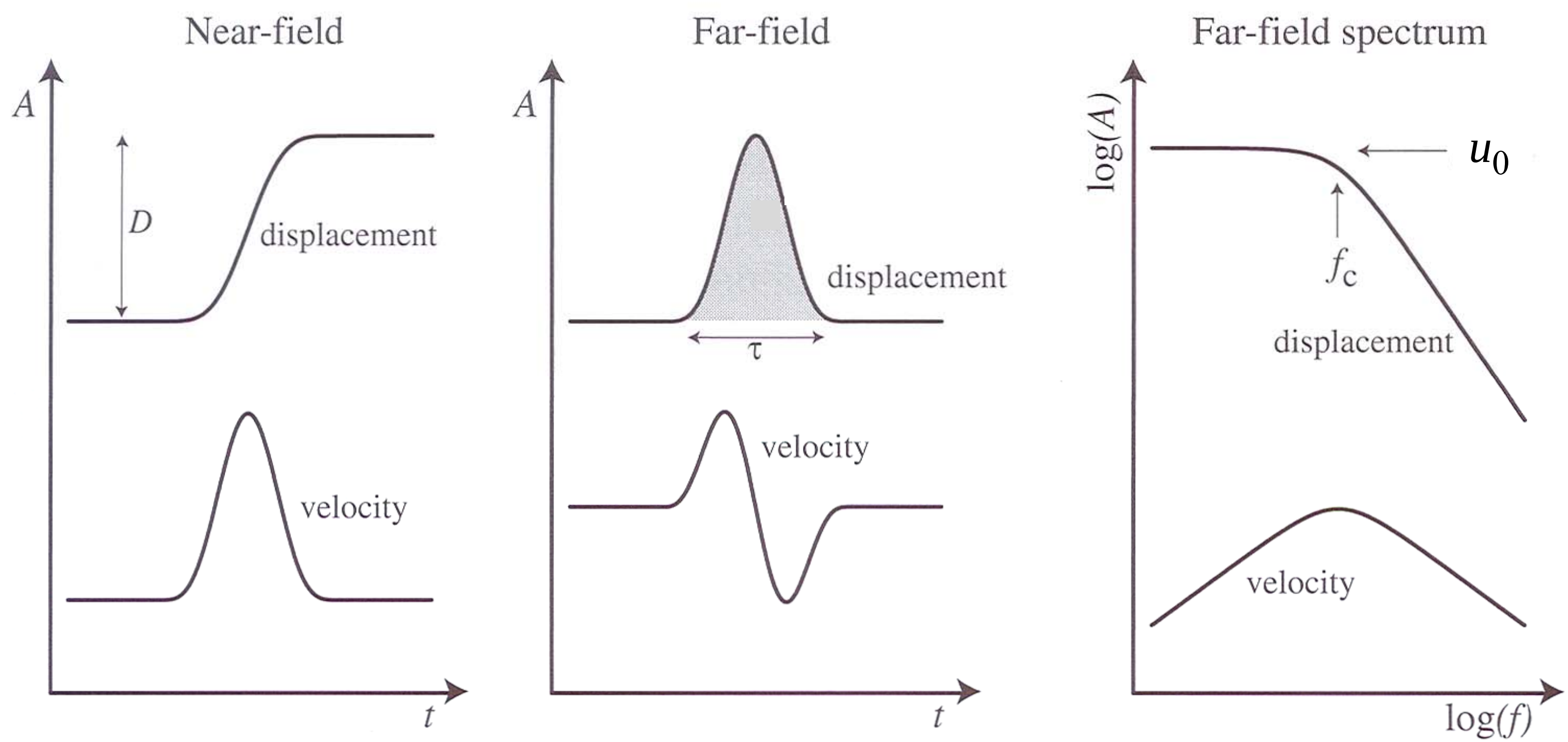
v princípe nerozlišuje malý sklz na veľkej ploche
od veľkého sklzu na malej ploche

$M_0$ možno určiť
zo spektier seizmických vĺn

príklad: povrch homogénneho polpriestoru

$$M_0 = \frac{4\pi\, d\, \rho\, V_{P/S}^3}{R_{\theta,\varphi}^{P/S}}\, u_0$$

| | |
|---|---|
| $d$ | hypocentrálna vzdialenosť |
| $\rho$ | hustota |
| $V_{P/S}$ | rýchlosť šírenia P/S vĺn |
| $R_{\theta,\varphi}^{P/S}$ | vyžarovacia charakteristika |
| $u_0$ | nízkofrekvenčná hodnota amplitúdového spektra korigovaná na odozvu seizmometra, útlm a voľný povrch |



Near-field
A
D
displacement
velocity
t
Far-field
A
displacement
τ
velocity
t
Far-field spectrum
log(A)
$u_0$
$f_c$
displacement
velocity
log(f)

momentové magnitúdo

$$M_W = \frac{2}{3}\left( \log_{10} M_0 - 9.1 \right) \quad ; \qquad \left[ M_0 \right] = N\,m$$

vráťme sa k šíreniu trhliny

trhlina, sklz

$$\left[\vec{u}\,(\vec{\xi},\tau)\right] = \vec{u}^{+}\,(\vec{\xi}^{+},\tau) - \vec{u}^{-}\,(\vec{\xi}^{-},\tau)$$

spontánnosť trhliny:  napätie na zlome je spojité

napätie na zlome

$$\vec{T}\,(\vec{v};\vec{\xi},\tau) = \vec{T}^{0}\,(\vec{v};\vec{\xi}) + \Delta\vec{T}\,(\vec{v};\vec{\xi},\tau)$$

vnútri trhliny:

v danom bode súvisí napätie so sklzom

prostredníctvom zákona trenia

$$\vec{T}\,(\vec{v};\vec{\xi},\tau) = \vec{T}^{f}\left(\left[\vec{u}\right],\frac{d\left[\vec{u}\right]}{dt},\theta\right)$$

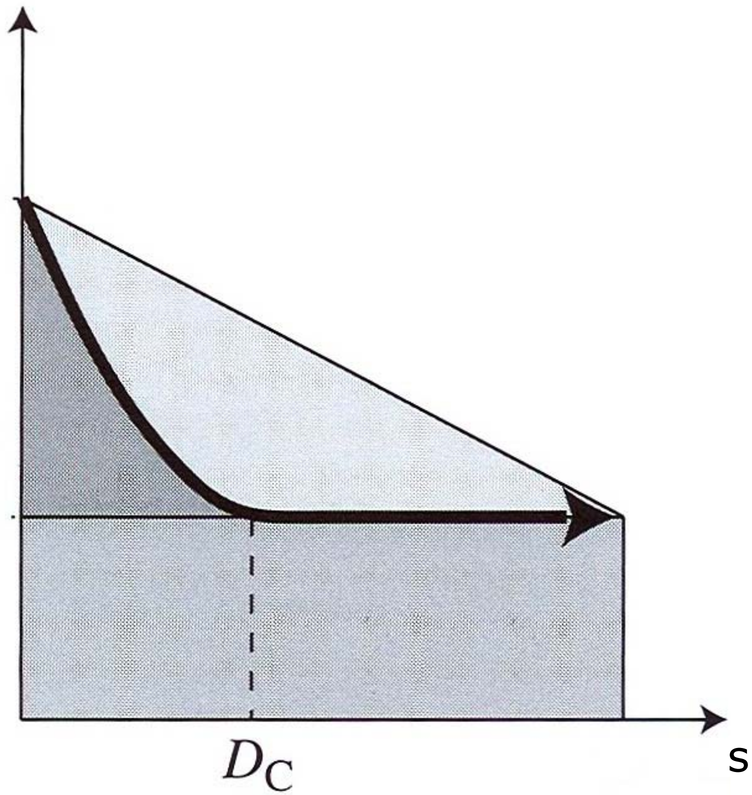
trenie pôsobí proti sklzu

## jednoduchý príklad zákona trenia

## pokles napätia so sklzom

statické napätie

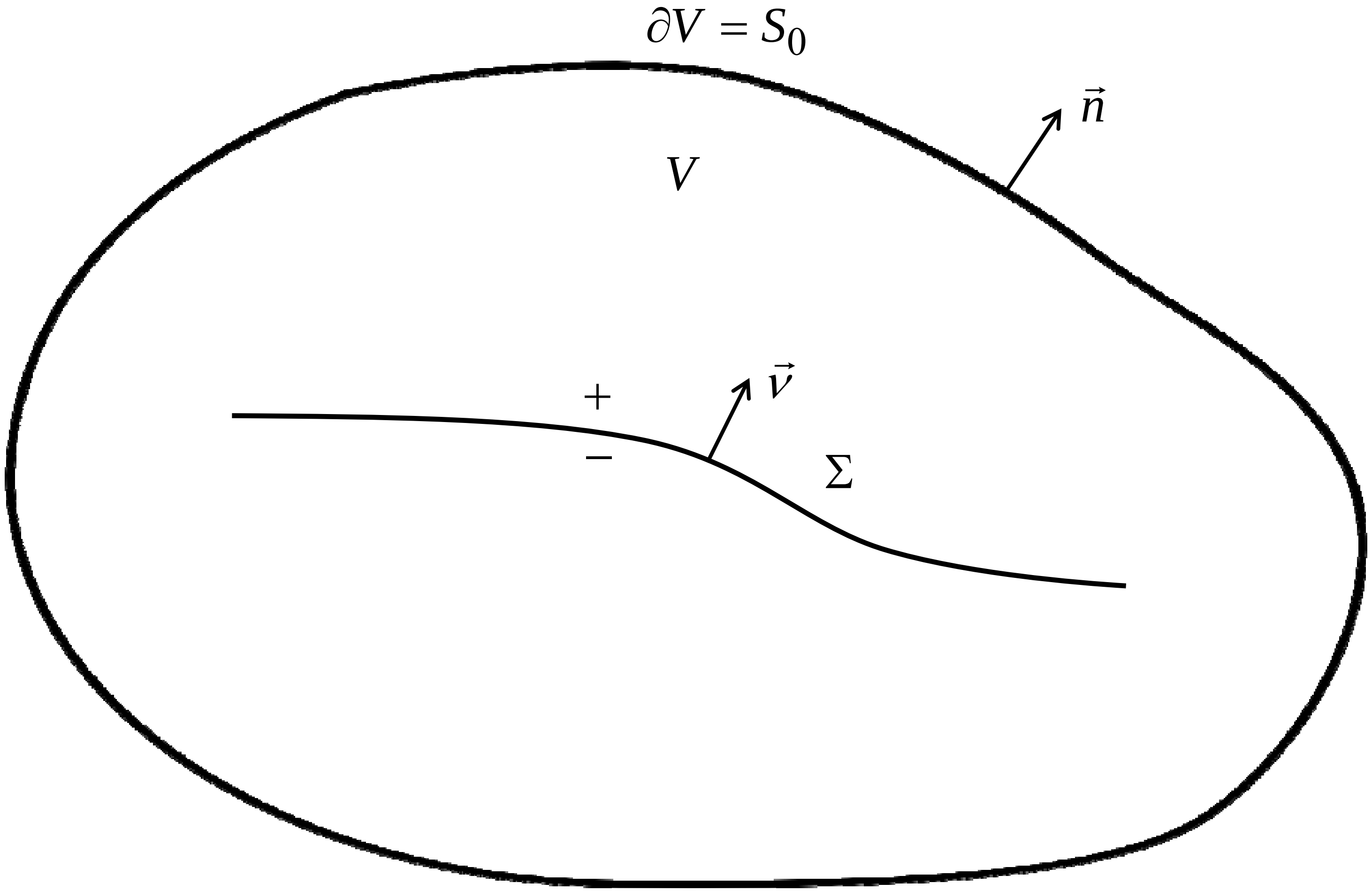
dynamické napätie




sklz

kritická vzdialenosť

vertikálny rez referenčným objemom



# rovnice pohybu a rovnováhy

## stav pred zemetrasením

$$0 = \sigma^0_{ij},_j + f_i$$

## počas zemetrasenia

$$\rho\ddot{u}_i = \sigma_{ij},_j + f_i$$

$$\rho\ddot{u}_i = \left(\sigma^0_{ij} + \tau_{ij}\right),_j + f_i \quad ; \quad \tau_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

možno predpokladať,
že gravitačná sila sa počas zemetrasenia nezmení

$$\rho\ddot{u}_i = \tau_{ij},_j$$

## stav po zemetrasení

$$0 = \sigma^1_{ij},_j + f_i$$

# objemová hustota energie deformácie

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \\ &= \sigma_{ij} \; d\varepsilon_{ij} \\ &= \left( \sigma_{ij}^{0} + \tau_{ij} \qquad \right) d\varepsilon_{ij} \\ &= \left( \sigma_{ij}^{0} + c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \right) d\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

využitím symetrie $c_{ijkl} = c_{klij}$

$$dW = d\left( \sigma_{ij}^{0}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{ij} \right)$$

## objemová hustota energie deformácie

$$dW = d\left( \sigma_{ij}^{0}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned} W - W^{0} &= \sigma_{ij}^{0}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{ij} \\ &= \sigma_{ij}^{0}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\left( \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\left( \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij} \right) u_{i,j} \end{aligned}$$

$$W = W^{0} + \frac{1}{2}\left( \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij} \right) u_{i,j}$$

## procesy v referenčnom objeme

počiatočná potenciálna energia v referenčnom objeme
sa uvolňuje v dôsledku a prostredníctvom
šírenia trhliny na zlomovej ploche $\Sigma$

uvoľnená potenciálna energia sa spotrebúva na
- prácu na vytvorenie trhliny na fronte trhliny
- prácu na prekonanie trenia
- kinetickú energiu v objeme
- prácu na ploche $S_0$

1. termodynamický zákon

$$-\dot{E}_P = \dot{E}_{\gamma eff} + \dot{A}_f + \dot{K} + \dot{E}_{S_0}$$

$$-\dot{E}_P = \dot{E}_{\gamma eff} + \dot{A}_f + \dot{K} + \dot{E}_{S_0}$$

práca na ploche $S_0$

$$\dot{E}_{S_0} = \dot{E}_{S_0}^{\sigma^0} + \dot{E}_q$$

$\dot{E}_q$ - vyžiarená energia (radiation energy)

- za určitých podmienok môže byť rovná energii seizmických vĺn šíriacich sa cez plochu $S_0$

procesy v referenčnom objeme

$$\dot{E}_q = -\dot{E}_P - \left( \dot{K} + \dot{E}_{S_0}^{\sigma^0} + \dot{A}_f + \dot{E}_{\gamma eff} \right)$$

energetická bilancia zemetrasenia

$$E_q = -\Delta\dot{E}_P - \left( E_{S_0}^{\sigma^0} + A_f + E_{\gamma eff} \right)$$

objemová hustota potenciálnej energie
= obj.h. energie deformácie + obj.h. gravitačnej energie

počiatočný stav

$$W^0$$

konečný stav

$$W^0 + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)u_i^1,_j - f_i u_i^1$$

celkový pokles potenciálnej energie v referenčnom objeme

$$\Delta E_P = \int_V \left\{ \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)u_i^1 \right\},_j dV$$

použitím Gaussovej integrálnej vety

$$\Delta E_P = \frac{1}{2}\int_{S_0}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)u_i^1 n_j \, dS - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)\left[u_i^1\right]\nu_j \, dS$$

$$E_q = -\Delta \dot{E}_P - \left( E_{S_0}^{\sigma^0} + A_f + E_{\gamma eff} \right)$$

$$E_q = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left( \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \right) \left[ u_i^1 \right] \nu_j \, dS - \frac{1}{2} \int_{S_0} \left( \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \right) u_i^1 n_j \, dS$$

$$+ \int_{S_0} \sigma_{ij}^0 u_i^1 n_j \, dS$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij} \left[ \dot{u}_i \right] \nu_j \, dS$$

$$- E_{\gamma eff}$$

vyžiarená energia (radiation energy)

= pokles potenciálnej energie v celom referenčnom objeme !!

- práca počiatočného napätia na ploche
- práca na prekonanie trenia $S_0$
- práca na vytvorenie trhliny na fronte trhliny

vyžiarená energia (radiation energy)

teda závisí od voľby objemu $V$ a teda aj od plochy $S_0$

uvažujme pre jednoduchosť celý priestor; potom

$$
\begin{aligned}
E_q \;=\; & \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)\left[u_i^1\right]\nu_j\,dS \\
& - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij}\left[\dot{u}_i\right]\nu_j\,dS \\
& - E_{\gamma eff}
\end{aligned}
$$

možno ukázať, že táto energia

je ekvivalentná energii P a S vĺn

dostatočne ďaleko od zdroja (far field)

s rastúcou veľkosťou plochy $\Sigma_1$

klesá podiel $E_{\gamma eff}$

je to dôsledok toho, že plošná hustota tejto energie je rádovo 1 J/m$^2$

tento člen preto zanedbáme

$$E_q = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)\left[u_i^1\right]\nu_j \, dS - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij}\left[\dot{u}_i\right]\nu_j \, dS$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij}\left[\dot{u}_i\right]\nu_j \, dS \\
&= \int_{\Sigma_1} dS \int_{t_r}^{t_1} \sigma_{ij}\left[\dot{u}_i\right]\nu_j \, dt \\
&= \int_{\Sigma_1} dS \int_{0}^{\left[u_i^1\right]} \sigma_{ij}\,\nu_j \, d\left[u_i\right]
\end{aligned}$$

$$E_q = \int_{\Sigma_1}\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)\left[u_i^1\right]\nu_j - \int_0^{\left[u_i^1\right]} \sigma_{ij}\,\nu_j \, d\left[u_i\right]\right\} dS$$

$$E_q = \int\limits_{\Sigma_1} \left\{ \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1\right)\left[u_i^1\right]\nu_j - \int\limits_0^{\left[u_i^1\right]} \sigma_{ij}\,\nu_j\, d\left[u_i\right] \right\} dS$$

uvažujme jednoduchý model

$$\vec{\nu} = (0,1,0) \quad , \quad [\vec{u}] = \left([u_x],0,0\right)$$

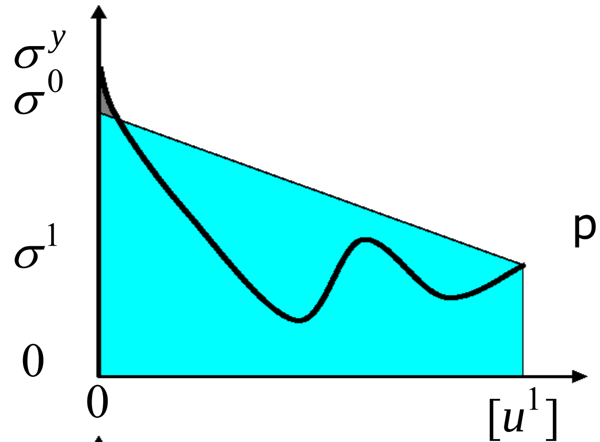
$$\Rightarrow$$

$$\sigma_{ij}\,\nu_j\,[u_i] = \sigma_{xy}\,[u_x] = \sigma\,[u]$$

$\sigma, \sigma^0, \sigma^1, [u]$ – konštantné na ploche $\Sigma_1$ veľkosti $A$

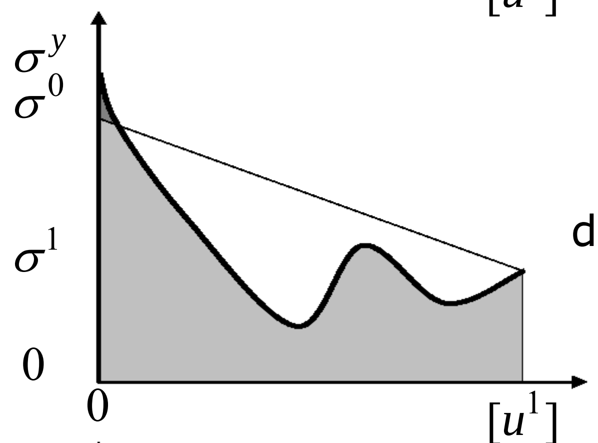
$$E_q = \left\{ \tfrac{1}{2}\left(\sigma^0 + \sigma^1\right)\left[u^1\right] - \int\limits_0^{\left[u^1\right]} \sigma\, d[u] \right\} A$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma^0 + \sigma^1\right)\left[u^1\right] A$$



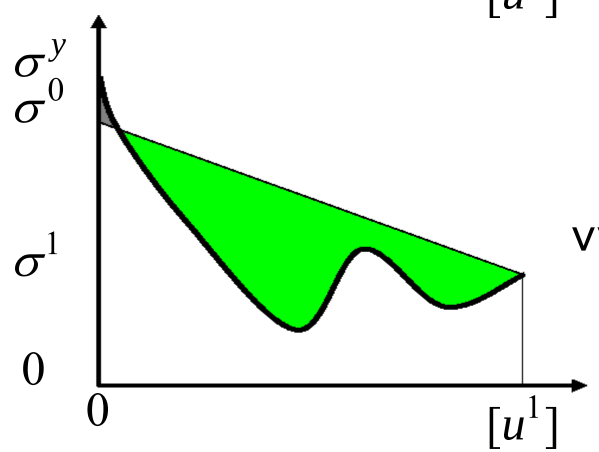

potenciálna energia

$$\int_0^{\left[u^1\right]} \sigma \, d\left[u\right] A$$




disipovaná energia

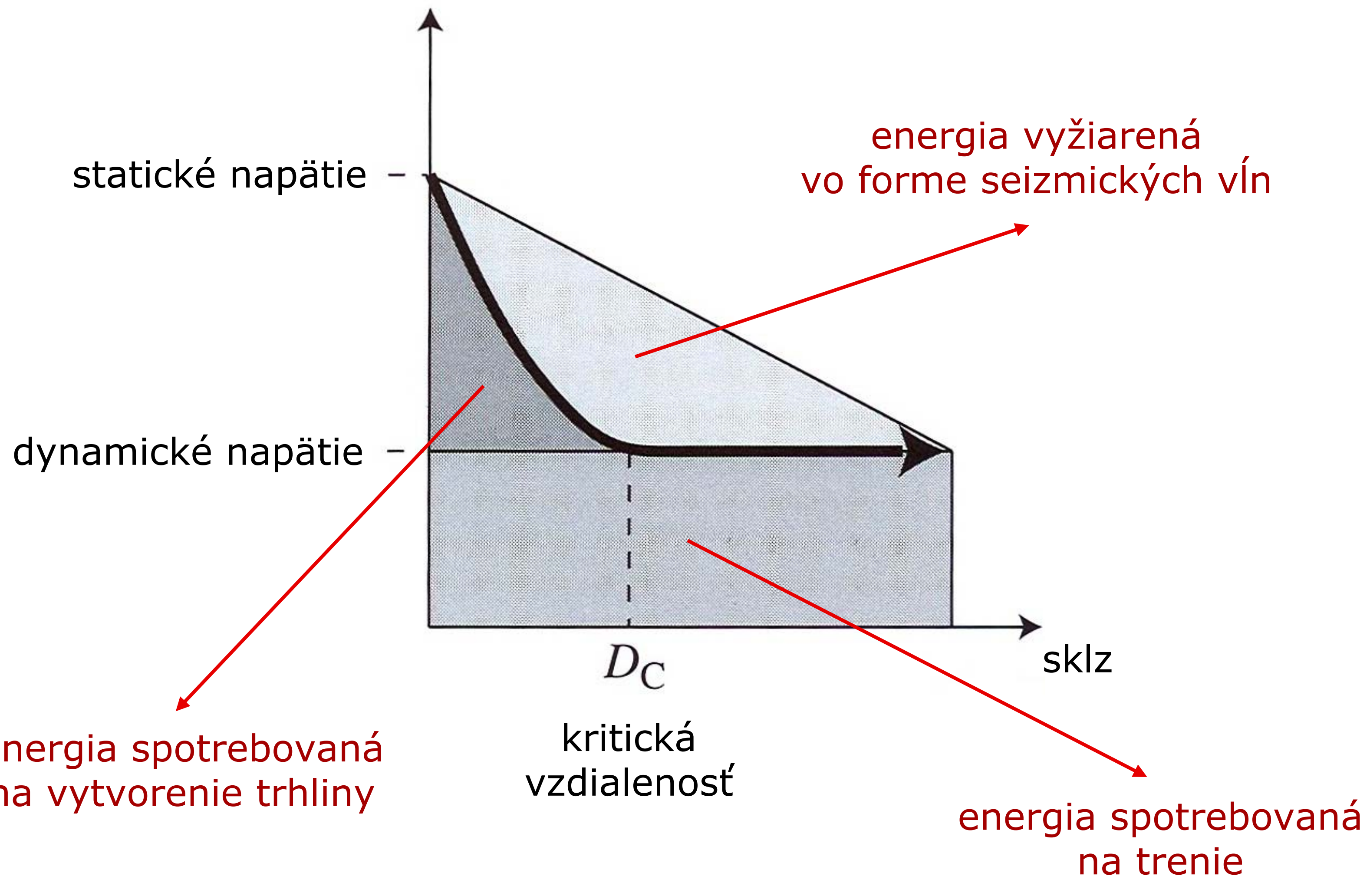
$$E_q$$



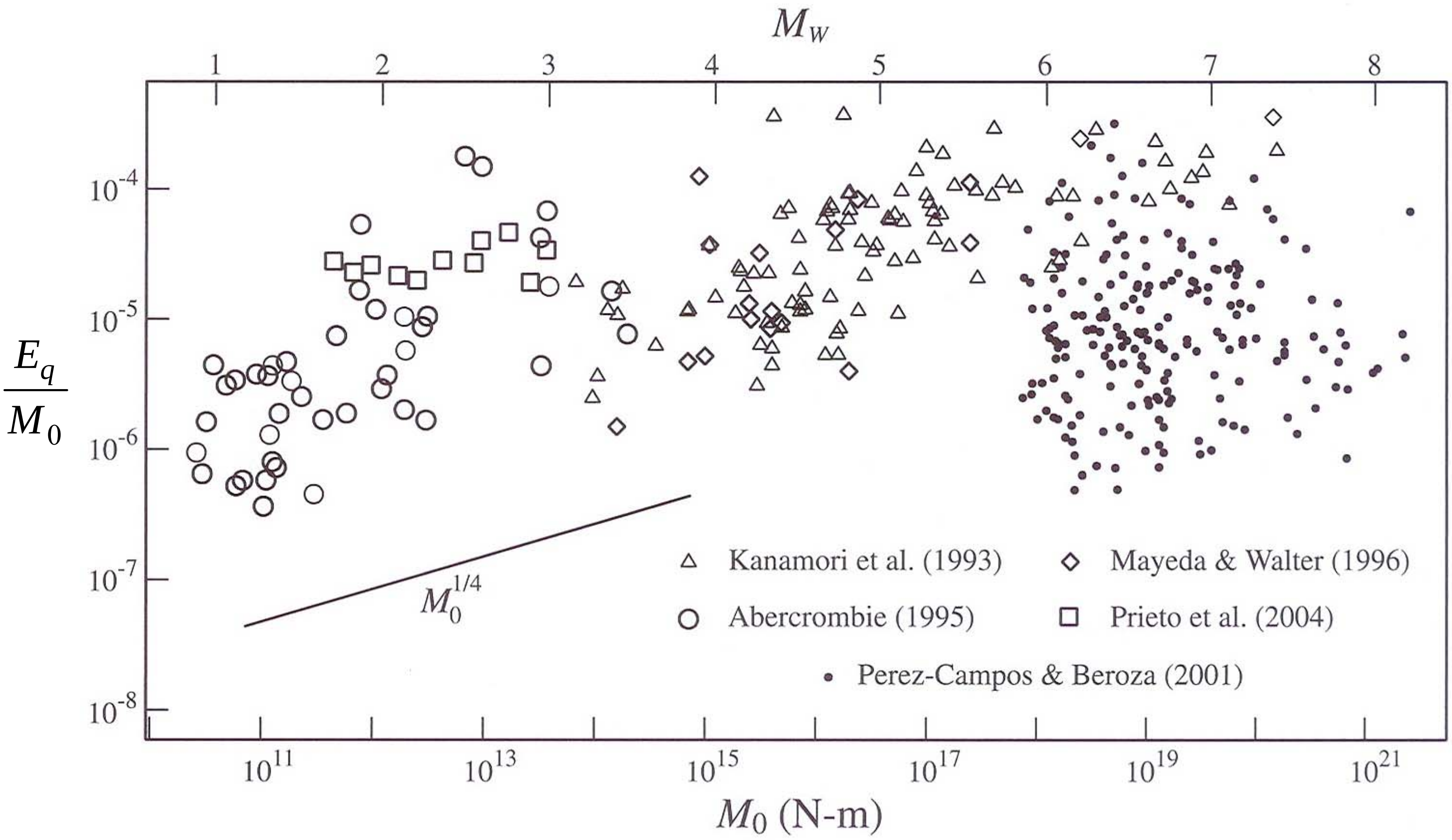

vyžiarená energia

jednoduchý príklad zákona trenia:

pokles napätia so sklzom



# namiesto záveru




Shearer 2009