

# Zvyšovanie výpočtovej efektívnosti konečno-diferenčných schém pre šírenie seizmických vln

Jozef Kristek, Peter Moczo, Martin Gális

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie  
FMFI UK Bratislava

Oddelenie seizmológie  
Geofyzikálny ústav SAV

úvod

nespojité striedavo usporiadaná sieť

PML hranice výpočtovej oblasti

záver

## **šírenie seizmických vln je určené**

pohybovou rovnicou viskoelastického kontinua

konštitučným zákonom

okrajovými podmienkami

nulové napätie na povrchu Zeme

spojitosť vektorov posunutia a napätia

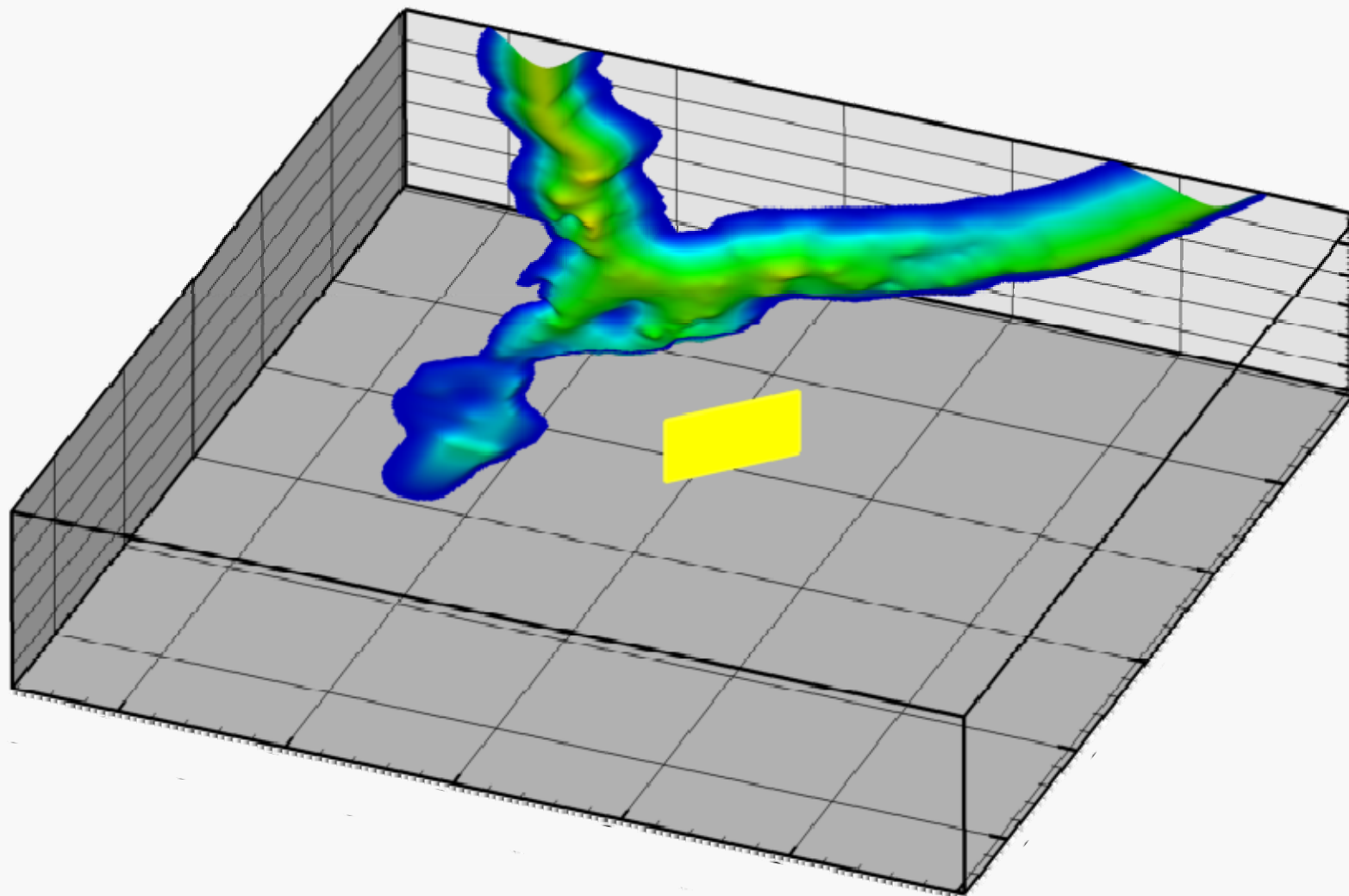
na vnútorných materiálových rozhraniach

**v prípade realistických modelov  
bez povrchovej topografie**

je v súčasnosti metóda konečných diferencií  
dostatočne presná  
a  
výpočtovo najefektívnejšia

výpočtový model

**výpočtová oblasť - kváder**



# výpočtový model

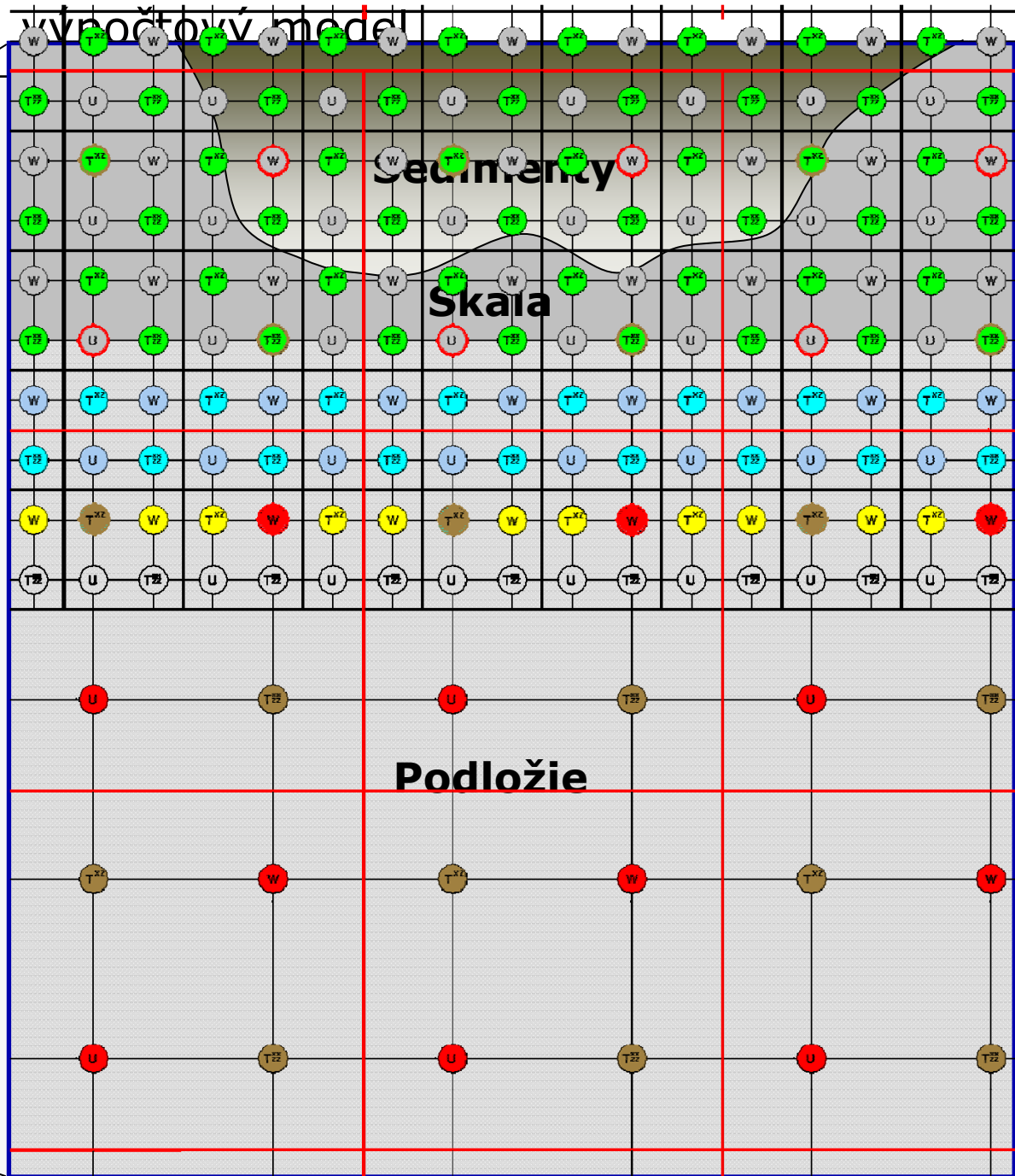
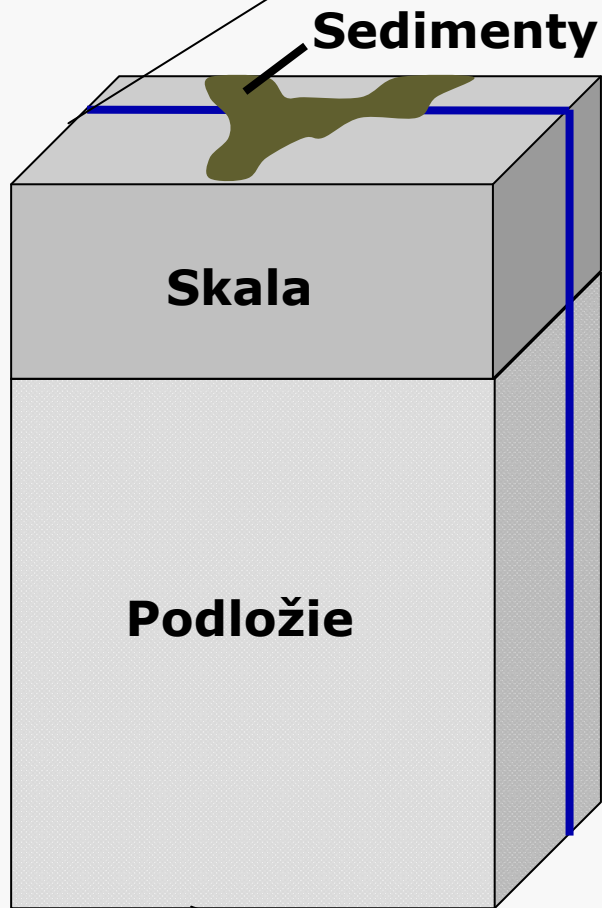
rozmery výpočtovej oblasti  
sú určené  
minimálnou záujmovou frekvenciou

$$\lambda_{\max} = \frac{\max V_P}{f_{\min}}$$

priestorové vzorkovanie (sieťový krok)  
je určené maximálnou frekvenciou

$$\lambda_{\min} = \frac{\min V_S}{f_{\max}}$$

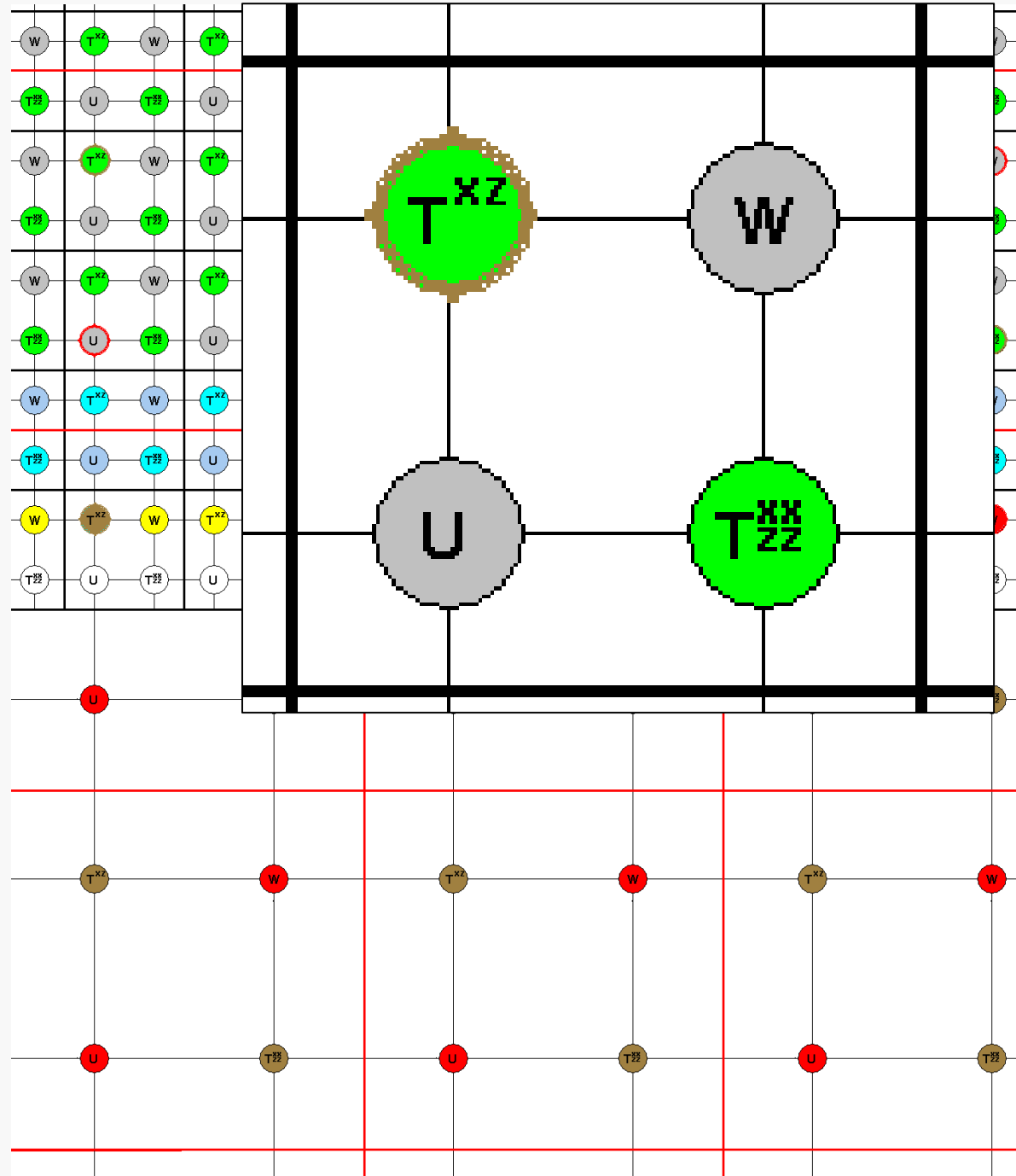
efektívnosť výpočtov dosiahnutá  
pokrytím výpočtovej oblasti  
nespojitou sieťou



# Ľubovoľne nespojitá striedavo usporiadaná sieť

vzorkovanie jemnej siete je  
 $n$ -krát menšie  
ako riedkej siete

$n$  je ľubovoľné **nepárne** číslo



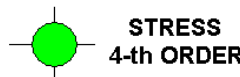
## Fine grid



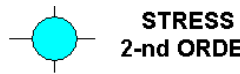
VELOCITY  
4-th ORDER



VELOCITY  
2-nd ORDER



STRESS  
4-th ORDER



STRESS  
2-nd ORDER

## Coarse grid



VELOCITY  
4-th ORDER



VELOCITY  
2-nd ORDER



STRESS  
4-th ORDER



STRESS  
2-nd ORDER



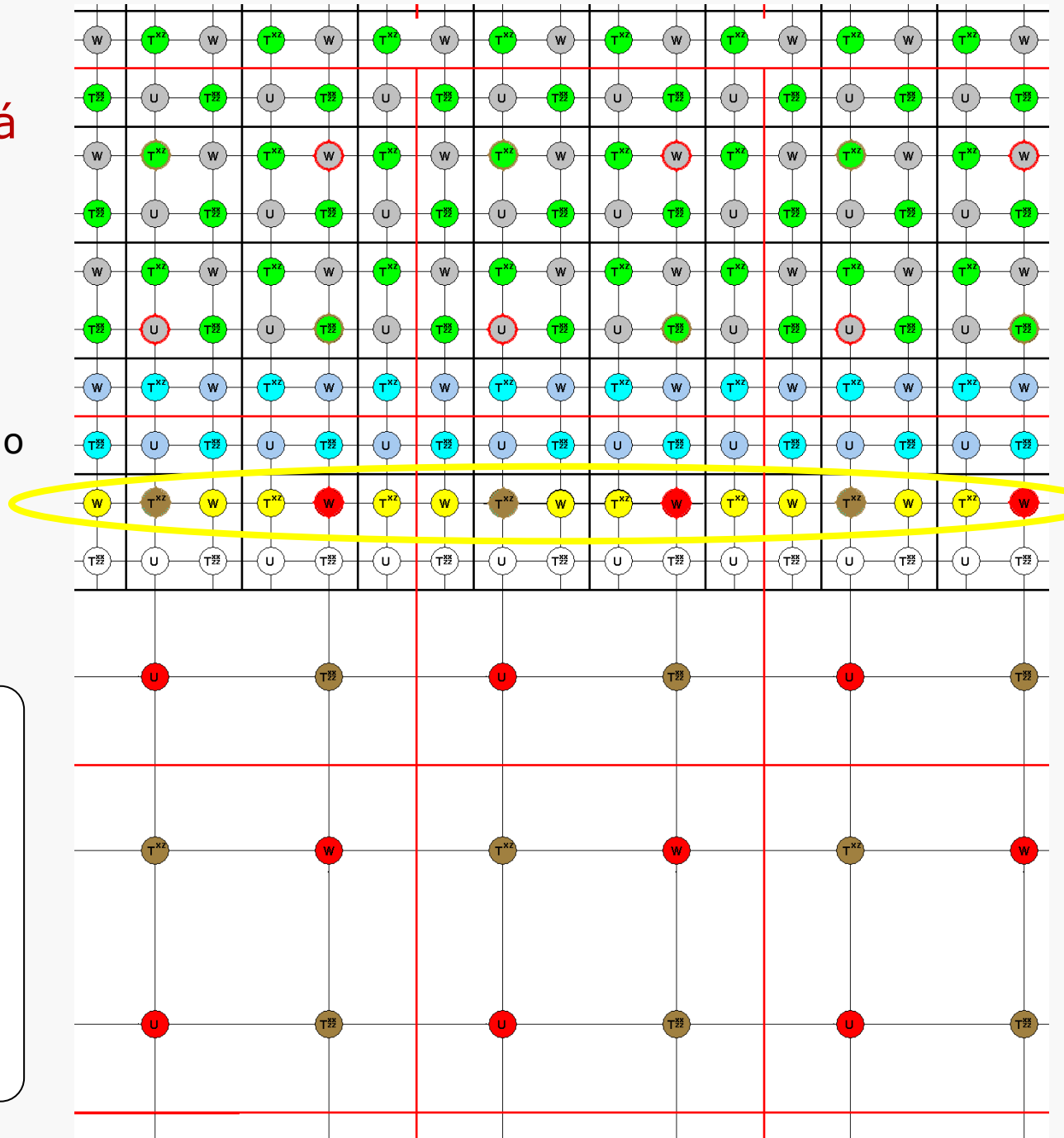
# Ľubovoľne nespojitá striedavo usporiadaná sieť

vzorkovanie jemnej siete je  
 $n$ -krát menšie  
ako riedkej siete

$n$  je ľubovoľné **nepárne** číslo

kontakt sietí:

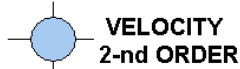
**bikubická interpolácia**



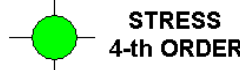
## Fine grid



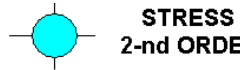
VELOCITY  
4-th ORDER



VELOCITY  
2-nd ORDER



STRESS  
4-th ORDER

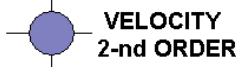


STRESS  
2-nd ORDER

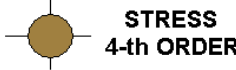
## Coarse grid



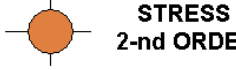
VELOCITY  
4-th ORDER



VELOCITY  
2-nd ORDER



STRESS  
4-th ORDER

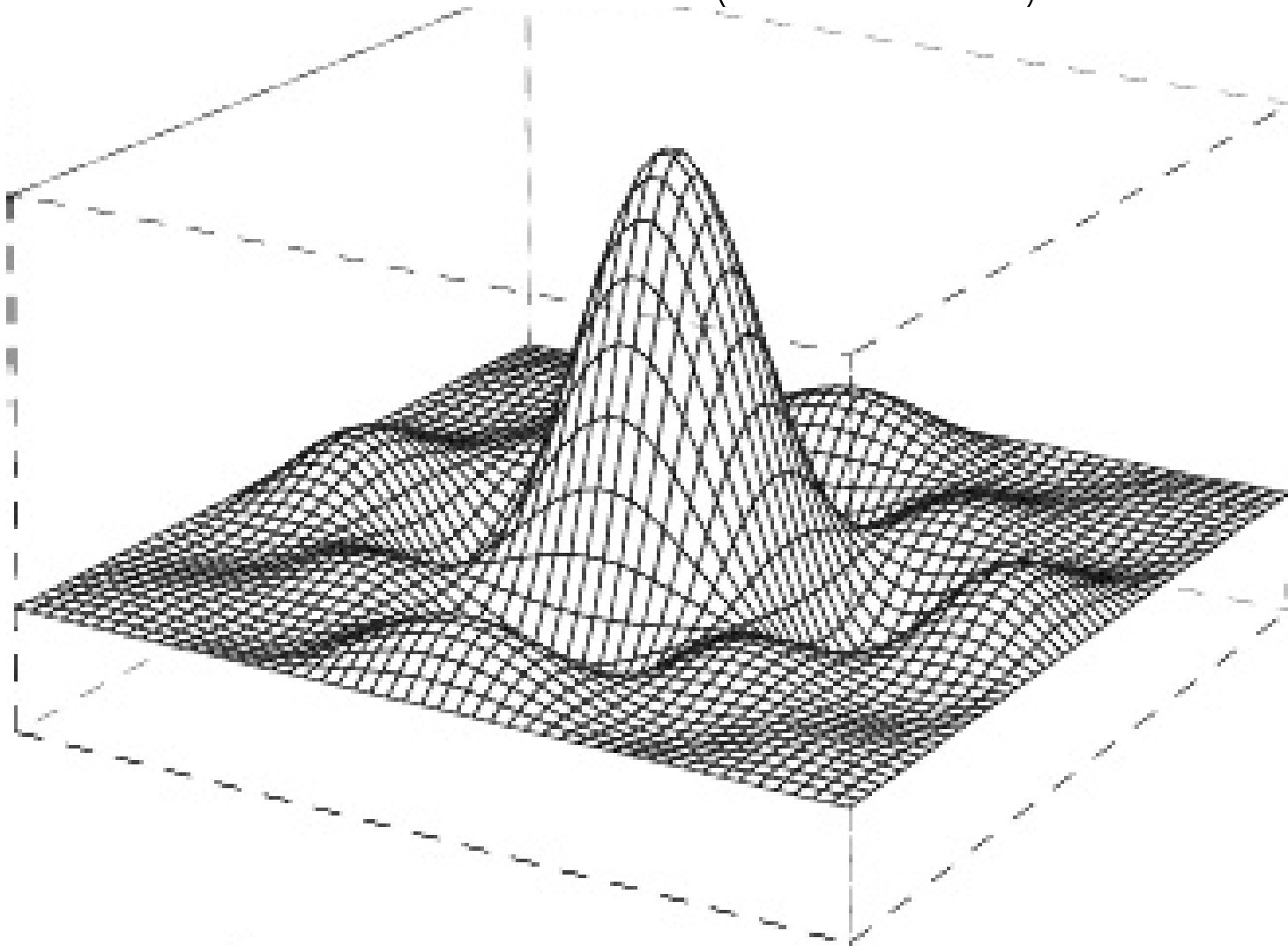


STRESS  
2-nd ORDER



## Lanczos downsampling filter

$$w_{kl}^L = A \cdot \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{k}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{l}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\sqrt{k^2 + l^2}}{n} / 2\right); \quad |k| \leq 2n, |l| \leq 2n$$



## Lanczos downsampling filter

$$w_{kl}^L = A \cdot \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{k}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{l}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\sqrt{k^2 + l^2}}{n} / 2\right); \quad |k| \leq 2n, |l| \leq 2n$$

kde  $A$  je škálovací faktor určený z podmienky

$$\sum_{k=-2n}^{2n} \sum_{l=-2n}^{2n} w_{kl}^L = 1$$

## Lanczos downsampling filter

$$w_{kl}^L = A \cdot \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{k}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{l}{n}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\sqrt{k^2 + l^2}}{n} / 2\right); \quad |k| \leq 2n, |l| \leq 2n$$

kde  $A$  je škálovací faktor určený z podmienky

$$\sum_{k=-2n}^{2n} \sum_{l=-2n}^{2n} w_{kl}^L = 1$$

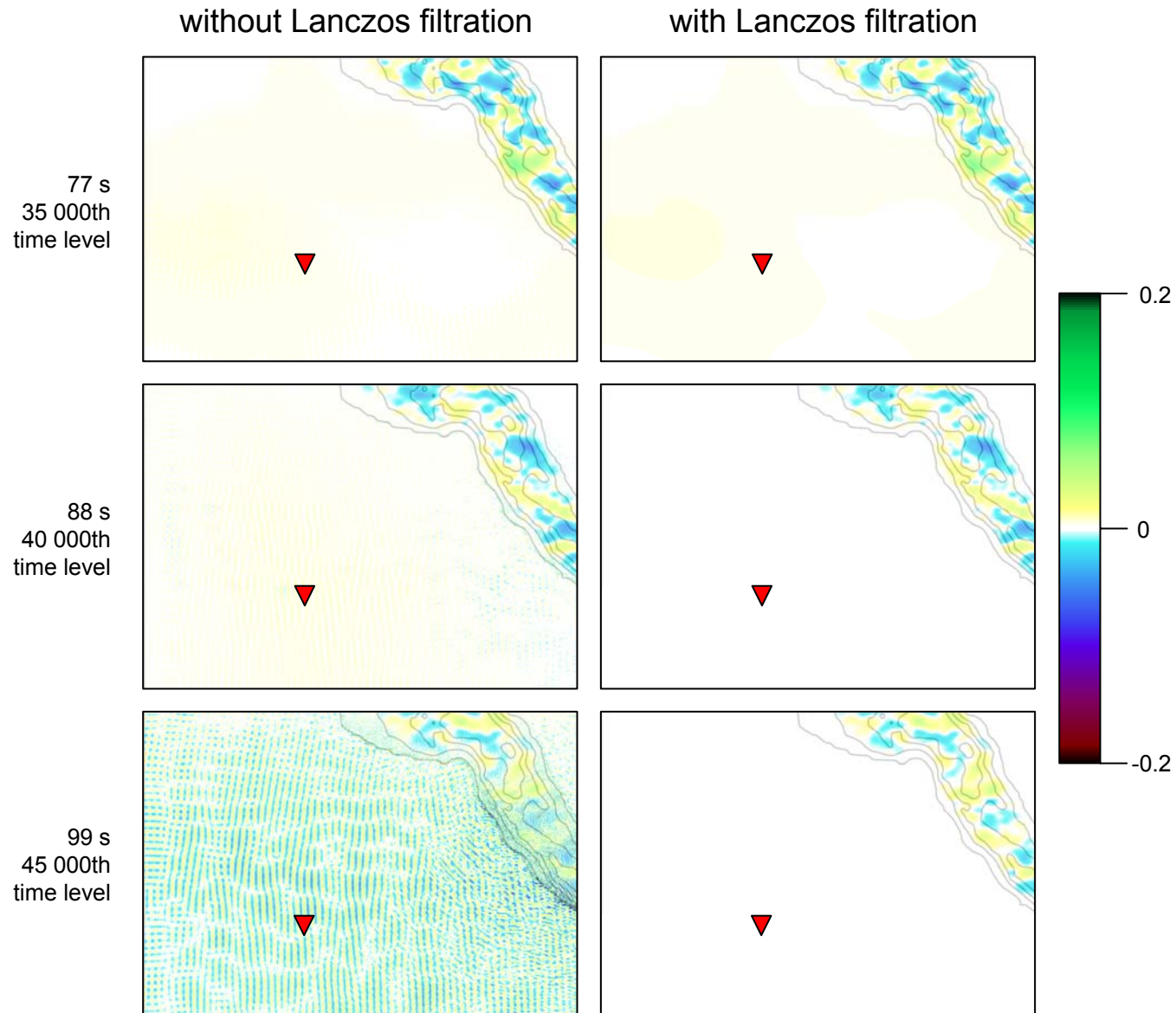
filtrované hodnoty premennej  $\Phi$  v bode  $(i, j)$  hustej siete

$$\bar{\Phi}(i, j) = \sum_{k=-2n}^{2n} \sum_{l=-2n}^{2n} w_{kl}^L \Phi(i+k, j+l)$$

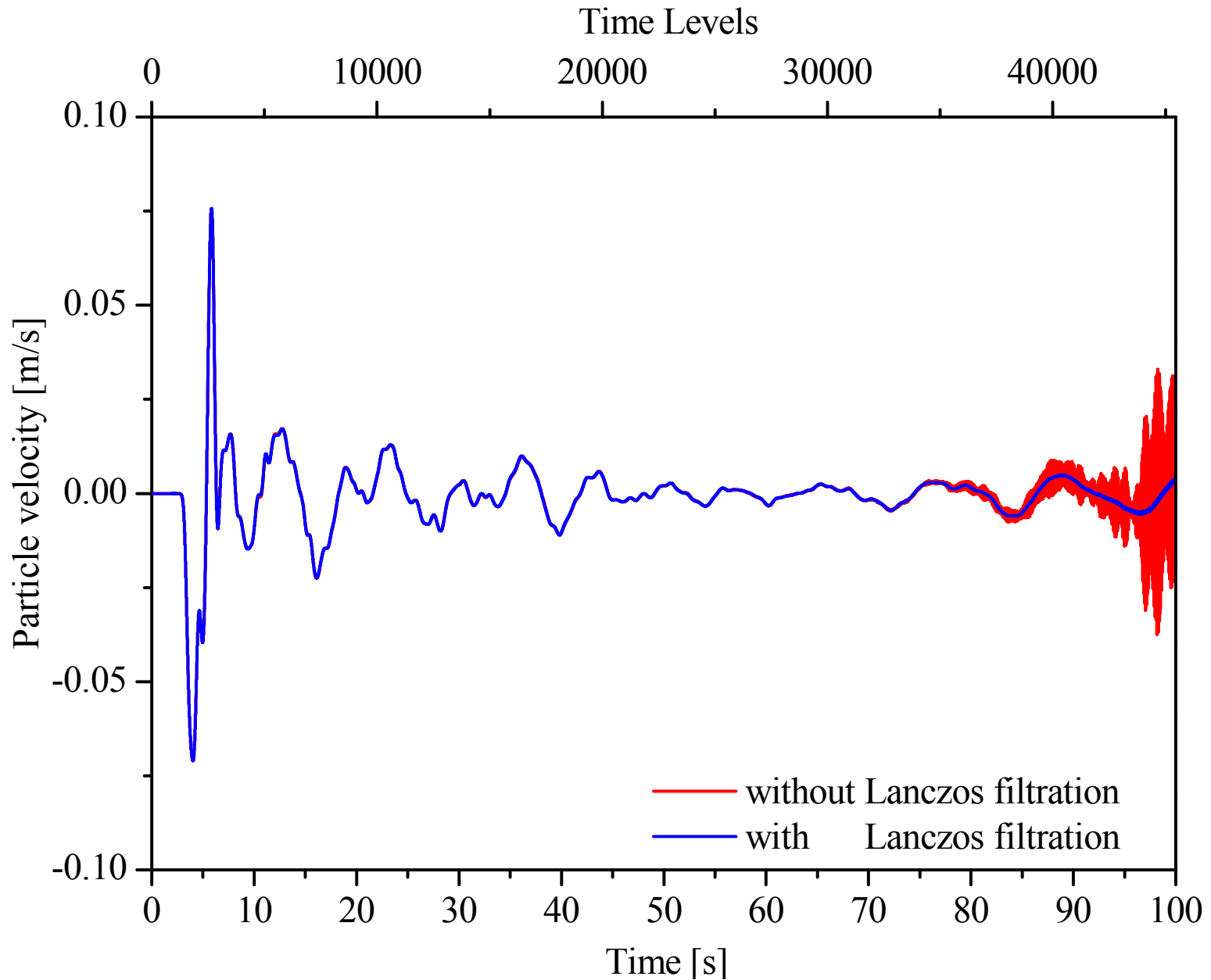
Filtrácia je aplikovaná v horizontálnej rovine



# Príklad – údolie Grenoble – nespojitá sieť s pomerom $n = 5$



# Príklad – údolie Grenoble – nespojitá sieť s pomerom $n = 5$





## **hranice výpočtovej oblasti**

transparentné / neodrážajúce hranice

- absorbujúce okrajové podmienky
- absorbujúce okrajové vrstvy

## **absorbujúce okrajové podmienky**

majú výhodu

nízkych pamäťových nárokov,  
avšak dostatočne presné sú len  
pre limitovaný rozsah uhlov dopadu

## **absorbujúce okrajové vrstvy**

pracujú lepšie (najmä tzv. PML),  
avšak za cenu  
zvýšených pamäťových nárokov

## **metóda dokonale ladenej vrstvy (PML)**

na rozhraní prostredia a PML vrstvy  
nie sú generované žiadne falošné odrazy  
a vlny, ktoré prejdú do PML vrstvy,  
sú „dokonale“ utlmené

### **základný princíp**

natahnutie súradnice  $p$  v smere,  
v ktorom chceme tlmiť vlny

## metóda dokonale ladenej vrstvy (PML)

na rozhraní prostredia a PML vrstvy  
nie sú generované žiadne falošné odrazy  
a vlny, ktoré prejdú do PML vrstvy,  
sú „dokonale“ utlmené

### základný princíp

natahnutie súradnice  $p$  v smere,  
v ktorom chceme tlmiť vlny

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

$\gamma_p, \Omega_p, \alpha_p$  parametre  
charakterizujúce vlastnosti PML vrstvy

najjednoduchšie  $\gamma_p = 1, \alpha_p = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

**Split:**  $\dot{v}_i = \dot{v}_i^p + \dot{v}_i^{qr}$

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ji,j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

**Split:**  $\dot{v}_i = \dot{v}_i^p + \dot{v}_i^{qr}$

---

$$i\omega \rho v_i^{qr} = \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

$$\text{Split: } \dot{v}_i = \dot{v}_i^p + \dot{v}_i^{qr}$$

$$i\omega\rho v_i^{qr} = \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$

L-Split

R-Split

$$si\omega\rho v_i^p = \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

$$i\omega\rho v_i^p = \frac{1}{s} \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

$$\text{Split: } \dot{v}_i = \dot{v}_i^p + \dot{v}_i^{qr}$$

$$i\omega\rho v_i^{qr} = \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$

L-Split

R-Split

$$i\omega\rho v_i^p = \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

$$i\omega\rho v_i^p = \frac{1}{s} \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

**General Case:  $s = \gamma + \Omega/(\alpha + i\omega)$**

$$\begin{aligned} \rho\dot{v}_i^p + \rho\frac{\Omega}{\gamma}v_i^p &= \frac{1}{\gamma}\sigma_{ji,j}\delta_{jp} + \eta_i^p \\ \dot{\eta}_i^p + \alpha\eta_i^p &= \rho(\alpha\Omega/\gamma)v_i^p \\ \rho\dot{v}_i^{qr} &= \sigma_{ji,j}(1 - \delta_{jp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho\dot{v}_i^p &= \frac{1}{\gamma}\sigma_{ji,j}\delta_{jp} + \theta_i^p \\ \dot{\theta}_i^p + a\theta_i^p &= -b\sigma_{ji,j}\delta_{jp} \\ \rho\dot{v}_i^{qr} &= \sigma_{ji,j}(1 - \delta_{jp}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad s_p = \gamma_p + \frac{\Omega_p}{\alpha_p + i\omega}$$

**Unsplit**

$$i\omega\rho v_i = \frac{1}{s} \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$



# PML

Formulation for velocity in the PML region perpendicular to direction  $p$ :  $\partial \tilde{x}_p = \frac{1}{s} \partial x_p$

$$\text{Split: } \dot{v}_i = \dot{v}_i^p + \dot{v}_i^{qr}$$

Unsplit

$$i\omega \rho v_i^{qr} = \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$

L-Split

R-Split

$$i\omega \rho v_i = \frac{1}{s} \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp})$$

$$s i\omega \rho v_i^p = \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

$$i\omega \rho v_i^p = \frac{1}{s} \sigma_{ji,j} \delta_{jp}$$

General Case:  $s = \gamma + \Omega/(\alpha + i\omega)$

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i^p + \rho \frac{\Omega}{\gamma} v_i^p &= \frac{1}{\gamma} \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \eta_i^p \\ \dot{\eta}_i^p + \alpha \eta_i^p &= \rho (\alpha \Omega / \gamma) v_i^p \\ \rho \dot{v}_i^{qr} &= \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i^p &= \frac{1}{\gamma} \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \theta_i^p \\ \dot{\theta}_i^p + a \theta_i^p &= -b \sigma_{ji,j} \delta_{jp} \\ \rho \dot{v}_i^{qr} &= \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp}) \end{aligned}$$

leads to:

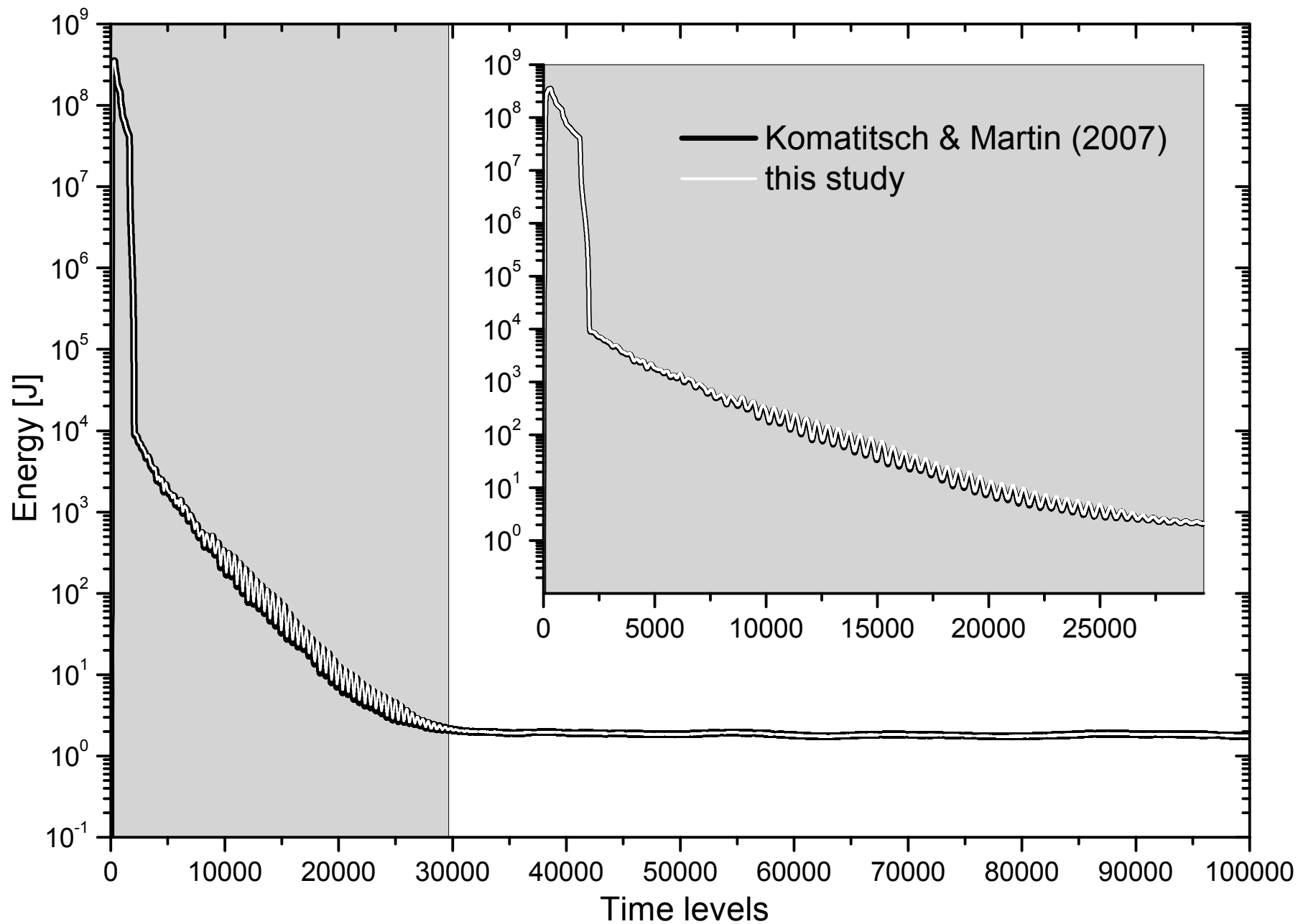
$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \frac{1}{\gamma} \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \theta_i^p + \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp}), \quad \dot{\theta}_i^p + a \theta_i^p = -b \sigma_{ji,j} \delta_{jp} \\ a &= \alpha + \Omega/\gamma, \quad b = \Omega/\gamma^2 \end{aligned}$$

Special Case:  $s = 1 + \Omega/i\omega$

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i^p + \rho \Omega v_i^p &= \sigma_{ji,j} \delta_{jp} \\ \rho \dot{v}_i^{qr} &= \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \sigma_{ji,j} \delta_{jp} + \theta_i^p + \sigma_{ji,j} (1 - \delta_{jp}) \\ \dot{\theta}_i^p + \Omega \theta_i^p &= -\Omega \sigma_{ji,j} \delta_{jp} \end{aligned}$$

# PML



# Záver

Vyvinuli sme algoritmus nespojitej siete  
pre 3D konečno-diferenčné modelovanie

Kľúčovou črtou algoritmu  
je aplikácia **Lanczosovho filtra**

**Pomer** medzi vzorkovaním jemnej a riedkej siete  
**môže byť ľubovoľné nepárne číslo**

Algoritmus umožňuje  
**veľký počet časových hladín bez nestabilit**

Koncept Lanczosovho filtra je obecný a robustný –  
jeho pozitívny efekt by nemal byť závislý  
na zvolenom algoritme/schéme

## Záver

Ukázali sme vzťahy medzi rôznymi formuláciami PML:  
split, unsplit, konvolučné, klasické

Odvodili sme dve varianty split formulácie (L-split, R-split)

Vo všeobecnom prípade  
obe varianty vedú  
ku konvolučnej formulácii PML

V špeciálnej forme strečing faktora  
L-split formulácia vedie na  
klasickú split formuláciu PML,  
zatiaľ čo

R-split formulácia ostáva konvolučnou

Odvodili sme algoritmicky jednoduchšiu časovú diskretizáciu  
unsplit formulácie PML

a ukázali sme dobrú zhodu s pôvodnou diskretizáciou

Ďakujem za pozornosť